Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.926.4 Қолжазба құқығында

МОЛДАҒАЛИ ЕРКЕБҰЛАН ӨМІРҒАЛИҰЛЫ

Коэффициенттері шенелмеген дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық шарттары

8D05401 – Математика

Философия докторы PhD
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер
Физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Қ.Н. Оспанов
Физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
А.К. Керимбеков
(Қырғызстан Республикасы)

Қазақстан Республикасы
Астана, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ……………………………………………………………...….... 3

1 АРАЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІ ШЕНЕЛМЕГЕН СЫЗЫҚТЫ ТӨРТІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ.......................... 12

1.1 Төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеу............................... 12

1.2 Шешімнің максималды регулярлық шарттары....................................... 18

2 ЕКІНШІ РЕТТІ АРАЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІЛУ ЖӘНЕ КОЭРЦИТИВТІЛІК ШАРТТАРЫ.. 31

2.1 Төртінші ретті бір минималды дифференциалдық оператор туралы..... 31

2.2 Екінші ретті аралық коэффициенті бар дифференциалдық теңдеудің шешілу шарттары.. 34

2.3 Екімүшелі оператордың бөліктену және максималды регулярлық шарттары.. 36

3 БІРІНШІ РЕТТІ КОЭФФИЦИЕНТІ НӨЛДЕН ЕРЕКШЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІЛУ ЖӘНЕ КОЭРЦИТИВТІЛІК ШАРТТАРЫ.. 49

3.1 Бір нұқсанды дифференциалдық оператордың қасиеттері туралы......... 49

3.2 Екімүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету..... 52

3.3 Шешімнің максималды регулярлы болу шарттары................................ 57

3.4 Өзіне түйіндес емес екімүшелі нұқсанды дифференциалдық оператордың резольвентасының компактылығы... 68

4 ШЕНЕЛМЕГЕН ЖОҒАРҒЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ.. 70

4.1 Төртінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары... 70

4.2. Коэффициенттері шенелмеген төртінші ретті екі мүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары.................................... 75

ҚОРЫТЫНДЫ.. 81

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ... 83

КІРІСПЕ

Диссертациялық жұмыс шенелмеген облыста берілген төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу шарттары мен оның шешімдерінің максималды регулярлығы мәселелеріне арналған.

Тақырыптың өзектілігі. Коэффициенттері айнымалы төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешуге әртүрлі практикалық есептер алып келетіні белгілі [1, 2]. Кіші мүшелері бар қарапайым бигармоникалық теңдеу серпімділік теориясында, серпімді пластиналар механикасында және тұтқыр сұйықтықтардың баяу ағынын зерттеуде маңызды. Алайда, ол - төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің өте дербес жағдайы. Коэффициенттері регулярлы сызықтық және сызықты емес төртінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін жиектік есептердің шешімдерінің табылуы және жалғыз болуы мәселелері әдебиетте кеңінен зерттелген [3]–[5]. Дегенмен, стохастикалық талдаудың, тербеліс теориясының, биологияның және математикалық қаржының кейбір есептері шектеусіз интервалда берілген және аралық коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулерге алып келеді [6-13]. Мұндай теңдеулердің шешілу шарттары және шешімнің сапалық қасиеттері негізінен коэффициенттердің шексіз алыс нүкте аймағындағы өзгеруіне және бір-бірімен қарым-қатынасына байланысты [14]-[21]. Төртінші ретті сингулярлық дифференциалдық теңдеу кей жағдайларда төменгі ретті теңдеулерді, мысалы Кортевег де-Фриз, немесе реакция – диффузия теңдеулерін зерттеу кезінде регуляризатор ретінде қолданылады [22].

Жұмыстың алғашқы үш бөлімінде сәйкес келесі

$$y^{(4)} + p_j(x)y^{(j)} = F(x),\ \ j = 1,2,3, \tag{1}$$

түріндегі екімүшелі теңдеулер қарастырылады, мұндағы $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$. (1) сияқты ең кіші коэффициенті нөлге тең және компактылы емес аралықта берілген теңдеу нұқсанды дифференциалдық теңдеу деп аталады. Нұқсанды екінші ретті эллиптикалық

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} = f(x)$$

теңдеуі стационарлы Фоккер – Планк – Колмогоров теңдеуі деген атпен белгілі. Ол бөлшектердің броундық қозғалысының моделі ретінде өткен ғасырдың 20-шы жылдарында-ақ зерттеле бастаған [8]. Мұндағы a_{ij}- ковarianттық матрица, ал b_i ығысу коэффициенті делінеді.

Алдағы уақытта біз $p_j(x)$ $(j = 1,2,3)$ j рет үзіліссіз дифференциалданатын оң функция деп ұйғарамыз. Бұл шарт орындалғанда төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ жиынында анықталған $L_0 y = y^{(4)} + p_j(x)y^{(j)}$ операторы $L_2(\mathbb{R})$

нормасында тұйықталатыны белгілі. L_0 - дің осы тұйықталуын L деп белгілейік. (1) теңдеуінің шешімі деп $Ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(L)$ элементін атаймыз.

Шектеусіз аралықта берілген төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің біршама қанағаттанарлық деңгейде зерттелген түрі келесідей:

$$y^{(4)} + q(x)y = f(x), f \in L_2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

$q \geq \delta > 0$ теңсіздіктері орындалғанда (2) теңдеуінің бірмәнді шешілуінің әлсіз шарттары [23, 24, 25, 26] жұмыстарында алынған. Сонымен бірге, [24] – те q функциясының тербелісі кейбір шарттарды қанағаттандырғанда, шешім үшін

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \|qy\|_2 \leq C\|f\|_2$$

теңсіздігі орындалатыны көрсетілген. Соңғы теңсіздік орындалған кезде (2) теңдеуінің y шешімін максималды регулярлы деп атайды [27]. $q \geq \delta > 0$, аларалық $p,\ r$ және s коэффициенттері шенелген функциялар болып келген жағдайда, (2) теңдеуі үшін алынған бұл нәтижелер келесі жалпы түрдегі

$$y^{(4)} + p(x)y''' + r(x)y'' + s(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3}$$

дифференциалдық теңдеуі үшін де дұрыс. Ол белгілі аз бұлқыну теоремаларын пайдалану арқылы дәлелденеді.

Дегенмен, кедергілі ортадағы физикалық процестер, биологиялық популяция, қаржы математикасы мен стохастикалық анализ және т.б. салалардағы көптеген практикалық есептер $p,\ r$ және s аралық коэффициенттері шенелмеген, ал кіші коэффициенті q нөлге тең, не болмаса өз таңбасын сақтамайтын (3) түріндегі дифференциалдық теңдеулерге, оның ішінде, нақты (1) нұқсанды дифференциалдық теңдеуіне, алып келеді [6, 28]. Егер p_j шенелмеген функция болып келсе, онда (1) теңдеуінің шешілуі мен шешімінің максималды регулярлы болуының шарттарын алу үшін жоғарыда келтірген [23, 24, 25, 26], сол сияқты [29, 30, 31] т.б. белгілі жұмыстардың әдістері жарамсыз. Себебі, (1) - дің аралық мүшесіне сәйкес келетін $p_j \frac{d^j}{dx^j} (j = 1,2,3)$ операторы төртінші ретті $\frac{d^4}{dx^4} + E$ ($E-$ бірлік оператор) дифференциалдық операторына бағынбайды. p_j жалпы түрдегі функция болған кезде бұл - басы ашық мәселе. Сондықтан, төртінші ретті (1) және басқа да кейбір нұқсанды дифференциалдық теңдеулер үшін шешілімділік және максималды регулярлық мәселелеріне арналған осы диссертациялық жұмыстың тақырыбы теориялық жағынан да, қолдану тұрғысынан да – сөзсіз өзекті.

Әдебиетте (3) сызықты дифференциалдық теңдеуінің аралық коэффициенттерін олар көбейтілген белгісіздің туындысына қарап әртүрлі ретке бөледі. Мысалы, теңдеудің s - бірінші, r - екінші ал p - үшінші ретті

коэффициенті. Диссертациялық жұмыстың барысында, мысалы, бөлімдер мен ішкі бөлімдерге атау берген кезде, біз осы терминді пайдаландық.

Екінші және жоғары ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулердің кең кластары үшін ұқсас есептер [32-42] жұмыстарында қарастырылған. Мұндай теңдеулердің шешімдері қанағаттандыратын салмақты бағалаулардың кейбір спектрлік қолданулары [43] – те көрсетілген.

Жұмыстың мақсаты. Нақты сан осінде берілген, коэффициенттері шенелмеген екімүшелі нұқсанды төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің бірмәнді шешілу шарттарын алу, шешімдерінің сапалық қасиеттерін көрсету және шешім үшін максималды регулярлық бағаларын дәлелдеу.

Зерттеу объектісі. Аралық мүшелері бар төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу шарттары, шешімдерінің максималды регулярлық бағалары.

Зерттеу әдістері. Локальды және априорлық бағалаулар әдістері, тұйық операторлар теориясының кейбір фактілері, Харди типті теңсіздіктерді қолдану, түйіндес операторларды идентификациялау және спектрлік теория әдістері. $j = 1, 2, 3$ мәндерінде (1) беретін дифференциалдық теңдеулердің табиғаты өзара әртүрлі. Оларды зерттеуге әртүрлі әдістер қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста аралық коэффициенттері шектеусіз өсе алатын екімүшелі төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулердің гильберт кеңістігінде шешілуі мен регулярлығы мәселелері зерттеліп, келесі жаңа нәтижелерге қол жеткізілді:

- қойылған есептерді осыған дейін кеңінен зерттелген нұқсанды емес және потенциалы таңбасын сақтайтын екімүшелі дифференциалдық теңдеулердің шешілуі мәселесіне келтіруге болатыны дәлелденді.

- $j = 2, 3$ жағдайларының әрқайсысында (1) дифференциалдық теңдеуінің шешімінің табылуы және жалғыз болуы үшін p_j функциясына қойылатын жеткілікті шарттар алынды.

- $j = 1$ жағдайында p_j коэффициентінің тербелісіне қосымша шарт қойылған кезде (1) теңдеуінің шешімі бар, әрі жалғыз екені дәлелденді.

- p_j коэффициентінің тербелісіне қосымша шарт қойылған кезде жоғарыдағы $j = 1, 2, 3$ үш жағдайдың әрқайсысында (1) теңдеуінің шешімі үшін максималды регулярлық бағасы орындалатыны көрсетілді.

- шенелмеген жоғарғы және аралық коэффициенттері бар дивергенттік түрде берілген төртінші ретті кейбір дифференциалдық теңдеулердің корректілік шарттары алынды.

- төртінші ретті екімүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеулерді құрайтын минималды дифференциалдық операторлардың резольвенталарының компактылы болуы үшін жеткілікті шарттар берілді.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы. Алынған нәтижелер - теориялық сипатта. Олар біріге отырып төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық теорияларын кеңейтеді. Оларды төртінші ретті жалпы түрдегі

дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін жуықтау әдістерінің сапасын бағалау үшін пайдалануға болады. Олар, сонымен бірге, төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін практикалық есептерді шешуге қолданылуы мүмкін.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Жұмыс нәтижелері «Дифференциалдық теңдеулердің заманауи мәселелері және олардың қолданылуы» атты халықаралық ғылыми конференцияда (Ташкент, 2023), «Ғылыми қызметкерлер күніне арналаған Дәстүрлі халықаралық ғылыми конференцияда (Алматы, 2024)», «Математика, механика және оларды қолданудың заманауи мәселелері (MPMMA)» халықаралық ғылыми конференциясында (Баку, 2024), Грузия математикалық одағының 14-ші халықаралық ғылыми конференциясында (Батуми, 2024), «Математика және математикалық білім беру (ICMME)» халықаралық ғылыми конференциясында (Невшехир, Түркия, 2024), «Математикалық физиканың классикалық емес теңдеулері және олардың қолданылуы» атты халықаралық ғылыми конференцияда (Ташкент, 2024), «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері (EMJ-2025)» халықаралық ғылыми конференциясында (Астана, 2025), «Қазақстан Республикасының Ғылым күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясында (Алматы, 2025)», «Ломоносов - 2025» XX халықаралық ғылыми конференциясында (Астана, 2025) баяндалды.

Жарияланымдар. Диссертацияның негізгі нәтижелері 13 ғылыми мақала мен конференциялар материалдарында [44-56], оның ішінде, 1 мақала Scopus базасына енетін математика саласынан CiteScore бойынша процентиль көрсеткіші 25-тен кем емес басылымда [44], 4 мақала уәкілетті орган ұсынған басылымдарда [45-48], 5 мақала алыс шет ел басылымдарында жарияланған.

Диссертацияның құрылымы. Диссертация кіріспеден, төрт бөлімнен (әр бөлім пункттерге бөлінген), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Жұмыстың бірінші бөлімінде аралық коэффициенті бар

$$y^{(4)} + p_3(x)y^{(3)} = F(x) \tag{4}$$

төртінші ретті дифференциалдық теңдеуі қарастырылады.

Үзіліссіз $\rho(t)$ және $v(t) \neq 0$ функциялары берілсін, k натурал сан болсын.

$$\alpha_{\rho,v,k} = \sup_{x>0}\left(\int_0^x |\rho(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^\infty t^{2(k-1)}v^{-2}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_{\rho,v,k} = \sup_{x<0}\left(\int_x^0 |\rho(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^x s^{2(k-1)}v^{-2}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_{\rho,v,k} = \max\left(\alpha_{\rho,v,k}, \beta_{\rho,v,k}\right)$$

деп белгілейік. Бөлімнің негізгі нәтижесі - келесідей.

Теорема 1. Айталық p үш рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болып, $p(x) \geq 1$ және $\gamma_{1,\sqrt{p},3} < \infty$ шарттары орындалсын. Онда әрбір $F \in L_2(\mathbb{R})$ үшін (1) теңдеуінің y шешімі табылады және ол жалғыз. Ал егер сонымен бірге

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq 1} \frac{p(x)}{p(\eta)} < \infty \qquad (5)$$

қатысы орындалса, онда y шешімі максималды регулярлы, басқаша айтқанда,

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \left\|py^{(3)}\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|F\|_2$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Теоремадағы $\gamma_{1,\sqrt{p},3} < \infty$ шарты p коэффициентінің шексіздікте өсу жылдамдығын көрсетеді. Ал (5) $-p$ $-$ның тербелісіне қойылған шектеу.

Мысал 1. Теорема 1 шарттарын келесі теңдеудің коэффициенті қанағаттандырады

$$y^{(4)} + (10x^4 + 3x^2 + 4)^3 y^{(3)} = f(x).$$

Демек, әрбір $f \in L_2(\mathbb{R})$ үшін оның жалғыз ғана y шешімі бар және ол

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \left\|(10x^4 + 3x^2 + 4)^3 y^{(3)}\right\|_2 \leq C\|f\|_2$$

максималды регулярлық теңсіздігін қанағаттандырады.

Жұмыстың 2-ші бөлімінде құрамына белгісіз y - тің тек жұп туындылары ғана енетін

$$-\mathrm{y}^{(4)} + r(x)\mathrm{y}'' = F(x) \qquad (6)$$

дифференциалдық теңдеуі қарастырылады, $x \in \mathbb{R}$, ал r - екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция.

$C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ жиынында анықталған $L_0\mathrm{y} = -\mathrm{y}^{(4)} + r(x)\mathrm{y}''$ операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасындағы тұйықталуын L деп белгілейік. $Ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(L)$ элементін (5) теңдеуінің шешімі деп атаймыз.

Бөлімнің негізгі нәтижесін келтіреміз.

Теорема 2. Айталық екі рет үзіліссіз дифференциалданатын r функциясы

$$r(x) \geq 1, \qquad \gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $F \in L_2(\mathbb{R})$ үшін (6) теңдеуінің y шешімі табылады және ол жалғыз ғана. Ал егер r сонымен қатар

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{r(x)}{r(\eta)}<\infty$$

қатысын қанағаттандырса, онда y шешімі үшін

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2+\|ry''\|_2+\|y\|_2\le C\|F\|_2$$

максималды регулярлық теңсіздігі орындалады.

Мысал 2. Теорема 2 шарттары

$$-y^{(4)}+(2x^4+15)^2y''=f(x)$$

теңдеуі үшін орындалады. Мұндағы $x\in\mathbb{R}$. Демек, әрбір $f(x)\in L_2(\mathbb{R})$ үшін теңдеудің бір ғана y шешімі бар және ол максималды регулярлы, атап айтқанда,

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2+\|(2x^4+15)^2y''\|_2+\|y\|_2\le C\|f\|_2$$

теңсіздігі орындалады.

Үшінші бөлімде

$$\mathrm{y}^{(4)}+s(x)\mathrm{y}'=F(x) \quad (7)$$

теңдеуі зерттелді. $L_0y=y^{(4)}+s(x)y'$, $D(L_0)=C_0^{(4)}(\mathbb{R})$, дифференциалдық операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын L деп белгілейік. (7) теңдеуінің шешімі деп $Ly=F$ орындалатын $y\in D(L)$ функциясын айтатын боламыз.

Бөлімде келесі тұжырымдар дәлелденді.

Теорема 3. Егер s

$$s(x)\ge 1,\ \ \gamma_{1,\sqrt{s},1}<\infty,\ \sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{s(x)}{s(\eta)}<\infty$$

қатыстарын қанағаттандыратын үзіліссіз дифференциалданатын функция болса, онда әрбір $F\in L_2(\mathbb{R})$ үшін (7) теңдеуінің y шешімі бар және ол жалғыз ғана. Сонымен қатар, y шешімі

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2+\|sy'\|_2+\|y\|_2\le C\|F\|_2$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Теорема 3 (7) теңдеуін құраушы $Ly = y^{(4)} + s(x)y'$, $y \in D(L)$, операторына кері L^{-1} операторының бар болуы мен шенелгендік шартын береді. Барлық шенелген операторлардың ішінде шекті өлшемді операторлар арқылы жуықтала алатын компактылы операторлар үлкен маңызға ие. Соңғы бағаны пайдаланып, L^{-1} операторының компактылы болуының келесі белгісі дәлелденді.

Теорема 4. Айталық, s коэффициенті 3 теоремасының шарттарын және

$$\lim_{x\to\infty} \alpha_{1,\sqrt{s},1}(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\int_x^{\infty} v^{-1}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\lim_{\tau\to-\infty} \beta_{1,\sqrt{s},1}(\tau) = \lim_{\tau\to-\infty} \sqrt{-\tau}\left(\int_{-\infty}^{\tau} v^{-1}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

теңдіктерін қанағаттандырсын. Сонда L^{-1} операторы $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігінде компактылы.

Теорема 4 – ке ұқсас резольвентаның компактылығы туралы тұжырымдарды 2 және 3 теоремаларын пайдаланып та дәлелдеуге болады.

Жұмыстың 1-, 2- және 3-бөлімдерінде дәлелденген тұжырымдар мынаны көрсетеді. Екімүшелі төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулер корректілі шешілуі үшін кейде олардың нөлдік емес аралық коэффициенттері шексіздікте жылдам өсуі жеткілікті. Ал аралық коэффициент баяу тербелу шартын қанағаттандырған жағдайда олардың шешімдері үшін максималды регулярлық теңсіздігі орындалады. Келтірілген 1, 2 және 3 теоремалары сырттай ұқсас болғанымен олардың дәлелдеу тәсілдері әртүрлі. Мысалы, Теорема 1-де екімүшелі дифференциалдық оператордың резольвентасының үзіліссіздігі бір дифференциалдық теңдеуді айқын шешу жолымен дәлелденеді. Теорема 2-де бұл факт Штурм-Лиувилль теориясындағы бір жалпы нәтижеден шығады. Ал Теорема 3-те ол үшін s коэффициентінен қосымша баяу тербелім шарты орындалуын талап етеміз және локальды бағалау әдісін қолдандық.

Жұмыстың төртінші бөлімінде жоғарғы мүшесінде айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулер қарастырылады.

4.1 пунктінде төртінші ретті

$$(\rho(x)(\rho(x)y')'')' - (r(x)y')' = F(x) \tag{9}$$

теңдеуінің корректілігі зерттеледі. Мұндағы $x \in \mathbb{R}$, ρ үш ретүзіліссіз дифференциалданатын, ал r үзіліссіз дифференциалданатын функция, $F \in L_2(\mathbb{R})$.

(9) түріндегі нұқсанды дифференциалдық теңдеуге тербелістердің, тұтқыр серпімді және серпімсіз ағындардың, иілу толқындарының және т.б. теорияларындағы бірқатар математикалық мәселелер алып келеді.(9)

дивергенттік формадағы теңдеу, оның басты ерекшелігі, шешімдердің регулярлық қасиеттері бірден байқалмайды, ол үшін қосымша талдаулар жасалуы қажет [3, 57].

Компактылы емес облыста берілген айнымалы коэффициентті төртінші және жоғарғы жұп ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық шарттары М.А. Наймарк [23], Р.С. Исмагилов [29] жұмыстарында зерттелген. Дегенмен, бұл жұмыстарда негізінен аралық коэффициенттері шенелген теңдеулер қарастырылды.

r аралық коэффициенті шенелмеген (9) теңдеуінің корректілі шешілу шарттары негізінен $\rho = 1$ жағдайында зерттелді. r – дәрежелік функция болғанда ол [58] жұмысында қарастырылды. r - дің кең, оның ішінде тербелмелі кластары үшін (1) - дің корректілік шарты [59] ([60] – ты да қараңыз) мақаласында берілді. Дегенмен, төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің жоғарғы коэффициенттері айнымалы және шенелмеген функциялар болып келген жағдай қосымша зерттеулер жүргізуді қажет етеді. 4.1 және 4.2 пунктінің нәтижелерін осы олқылықтың орнын толтыруға бағытталған кейбір ізденістер болып табылады. (9) теңдеуіне сәйкес келетін минималды тұйық дифференциалдық оператордың кейбір спектрлік қасиеттері [61] мақаласында көрсетілген.

Теорема 5. Егер ρ және r функцияларыжоғарыда айтылғандай тегіс болып, $0 < \delta_1 \le \rho(x) \le C(1 + |x|^N)$ $(N > 0)$, $\frac{r}{\rho^2} \ge 1$ және $\gamma_{1,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырса, онда (9) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Бұл тұжырымның құндылығы – мынада. (9) теңдеуінің мүшелері дивергенттік формада жазылса да, шектеулер коэффициенттердің өздеріне ғана қойылған және оларды функциялардың кең кластары қанағаттандырады. Оны дәлелдеу үшін салмағы бар Харди типті бір интегралдық теңсіздік, априорлық бағалау әдістері, тегіс функциялар класында шешім нормаларын Фридрихсше бағалау амалы қолданылды және (9) – теңдеумен байланысты бір дифференциалдық операторға түйіндес оператордың ядросы толық сипатталды.

4.2 пунктінде айнымалы коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі

$$\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' = F(x) \qquad (10)$$

теңдеуі қарастырылады. Мұндағы s - оң, тегіс функция, $F \in L_2(\mathbb{R})$. (10) теңдеуінің ерекшелігі – ρ, r және s функциялары шенелмеген. 4.2 пунктінің негізгі нәтижелерін келтірейік.

Теорема 6. Егер $r(x)$, $s(x)$ функциялары $0 < \delta \le s(x)$, $0 < \delta \le r(x)$, $\gamma_{1+s,\sqrt{r},1} < \infty$ және $0 < \delta_1 \le \rho(x) \le C(1 + |x|^N)(N > 0)$, $\frac{r}{\rho^2} \ge 1$ қатыстарын қанағаттандырса, онда (10) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Теорема 7. Егер r, ρ және s функциялары 6 теоремасының шарттарын қанағаттандырып,

$$\lim_{x \to \infty} \alpha_{s,\sqrt{r},1}(x) = 0, \lim_{t \to -\infty} \beta_{s,\sqrt{r},1}(t) = 0$$

теңдіктері орындалса, онда (10) теңдеуін құрайтын

$$ly = \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'$$

минималды тұйық дифференциалдық операторына кері l^{-1} операторы $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігінде компактылы болады.

Қорытынды бөлімде алынған нәтижелердің жалпы сипаты, олардың қолданылу мүмкіндіктері келтірілген.

1 АРАЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІ ШЕНЕЛМЕГЕН СЫЗЫҚТЫ ТӨРТІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ

1.1 Төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеу

Келесі теңдеуді қарастырайық:

$$y^{(4)} + p(x)y^{(3)} = f(x), \tag{1.1.1}$$

Мұндағы $x \in \mathbb{R}$, $p(x)$ – тегіс функция, ал $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ - төрт ретке дейін үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған $l_0 y = y^{(4)} + p(x)y^{(3)}$ төртінші ретті дифференциалдық операторын алып, оның $L_2(\mathbb{R})$ -дегі тұйықталуын l деп белгілейміз. (1.1.1) теңдеуінің шешімі деп $ly = f$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін атаймыз.

Алдағы уақытта C арқылы оң, бірақ әр жерде мәні әртүрлі болуы мүмкін тұрақтыларды белгілейтін боламыз.

Лемма 1.1.1. Айталық p үзіліссіз дифференциалданатын функция болып,

$$p(x) \geq \delta > 0 \tag{1.1.2}$$

қатысын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2 \leq \left\|\frac{l_0 y}{\sqrt{p}}\right\|_2. \tag{1.1.3}$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. Онда $A = \left(l_0 y, y^{(3)}\right)$ скалярлық көбейтіндісі анықталған. Келесі түрлендірулерді жасайық

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} y^{(4)} y^{(3)}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[y^{(3)}\right]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} y^{(3)}\, dy^{(3)} + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[y^{(3)}\right]^2 dx =$$

$$= \frac{\left[y^{(3)}\right]^2}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[y^{(3)}\right]^2 dx = \int p(x)\left[y^{(3)}\right]^2 dx. \tag{1.1.4}$$

Екінші жағынан

$$A \leq \int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|\left|y^{(3)}\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y| \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\sqrt{p(x)}\left|y^{(3)}\right| dx \leq$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{p(x)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left|y^{(3)}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.1.5)$$

(1.1.4) және (1.1.5) теңсіздігінен

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left|y^{(3)}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{p(x)} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Осыдан (1.1.3) шығады. (1.1.2) шарты орындалғанда (1.1.3)-тің оң жағы шектелген. Лемма дәлелденді.

$\rho(t)$ және $v(t) \neq 0$ үзіліссіз функциялар болсын,

$$\alpha_{\rho,v,k}(x) = \left(\int_0^x |\rho(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{\infty} t^{(k-1)2} v^{-2}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_{\rho,v,k}(\tau) = \left(\int_\tau^0 |\rho(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\tau} s^{(k-1)2} v^{-2}(s)\, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_{\rho,v,k} = \max\left(\sup_{x>0} \alpha_{\rho,v,k}(x), \sup_{\tau<0} \beta_{\rho,v,k}(\tau)\right) \qquad (1.1.6)$$

деп белгілейік. Мұндағы $k \in \mathbb{N}$.

Келесі лемма [62, 63] мақалаларының әдісімен [61] – ден шығады.

Лемма 1.1.2. Егер $\rho(t)$ және $v(t)$ функциялары

$$\gamma_{\rho,v,k} < \infty \qquad (1.1.7)$$

қатысын қанағаттандырса, онда әрбір $g \in C_0^{(k)}(\mathbb{R})$ үшін

$$\|\rho g\|_2 \le C\left\|v g^{(k)}\right\|_2 \qquad (1.1.8)$$

теңсіздігі орынды. Және (1.1.8) орындалатын ең кіші C тұрақтысы

$$C \le \frac{2}{(k-1)!}\gamma_{\rho,v,k} \qquad (1.1.9)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Лемма 1.1.3. Айталық $p(x) \ge \delta > 0$ үзіліссіз дифференциалданатын және $\gamma_{1,\sqrt{p},3} < \infty$ шартын қанағаттандыратын функция болсын. Сонда l операторы қайтымды және әрбір $y \in D(l)$ үшін

$$\|y\|_2 + \left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2 \le C\|ly\|_2$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. $\gamma_{1,\sqrt{p},3} < \infty$ шарты мен Лемма 1.1.2 бойынша, әрбір $y \in C_0^{(3)}(\mathbb{R})$ үшін мына теңсіздіктер орынды

$$\|y\|_2 \le C\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2 \le C\left\|\frac{l_0 y}{\sqrt{p}}\right\|_2.$$

(1.1.1) қатысынан, бір ε саны табылып, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{p(x)} \le \varepsilon$ теңсіздігі орындалатынын көреміз. Осыдан

$$\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2 \le \sqrt{\varepsilon}\|l_0 y\|_2 \qquad (1.1.10)$$

және

$$\|y\|_2 \le C\sqrt{\varepsilon}\|l_0 y\|_2. \qquad (1.1.11)$$

(1.1.10), (1.1.11) бағалары әрбір $y \in D(l)$ үшін де орынды. Шынында да, айталық $y \in D(l)$ болсын. Онда, біріншіден l операторы l_0 -дің тұйықталуы болғандықтан, әрбір $y \in D(l)$ үшін $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(l_0) = C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \ \ \|l_0 y_n - ly\|_2 \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (1.1.12)$$

қатыстары орындалады. Онда

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \qquad \|l_0 y_n\|_2 \to \|ly\|_2 (n \to \infty). \qquad (1.1.13)$$

Ал (1.1.11) бойынша,

$$\|y_n\|_2 \le C\sqrt{\varepsilon}\|l_0 y_n\|_2. \qquad (1.1.14)$$

(1.1.14) және (1.1.13) – тен

$$\|y\|_2 \le C\sqrt{\varepsilon}\|ly\|_2, \forall y \in D(l). \qquad (1.1.15)$$

Екіншіден, (1.1.11), (1.1.10) және (1.1.12) бойынша, әрбір n, m номерлері үшін

$$\left\|\sqrt{p}y_n^{(3)}-\sqrt{p}y_m^{(3)}\right\|_2+\|y_n-y_m\|_2\le C\|l_0y_n-l_0y_m\|_2\to 0\ (n,m\to\infty).$$

Демек, $\left\{\sqrt{p}y_n^{(3)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды. Онда, l дифференциалдық операторы тұйық болғандықтан,

$$\left\|\sqrt{p}y_n^{(3)}-\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2\to 0\quad (n\to\infty),$$

демек

$$\left\|\sqrt{p}y_n^{(3)}\right\|_2\to\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2(n\to\infty). \tag{1.1.16}$$

Нормасы $\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2+\|y\|_2$ болатын салмақты кеңістік – толық екені белгілі. Сондықтан (1.1.16), (1.1.10), (1.1.13) және (1.1.14) қатыстарынан

$$\|y\|_2+\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2\le C\|ly\|_2 \tag{1.1.17}$$

бағасы шығады. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.1.4. Айталық $p(x)$ үшін Лемма 1.1.3 шарттары орындалсын. Онда (1.1.1) теңдеуінің шешімі y жалғыз ғана.

Дәлелдеу. Қарсы жориық. Айталық y пен z (1.1.1) теңдеуінің әртүрлі екі шешімі болсын. Онда $y\neq z$ және $y\in D(l),\ ly=f, z\in D(l),\ lz=f$. Егер $y-z=v$ деп белгілесек, онда $lv=l(y-z)=f-f=0$ екенін көреміз. Лемма 1.1.3 – тегі (1.1.17) бағасы бойынша, $\|v\|=0$. Демек $y=z$. Лемма дәлелденді.

(1.1.17) бағасы әрбір $y\in D(l)$ үшін орынды. Бұдан $\sqrt{p}y^{(3)}\in L_2(\mathbb{R})$ екенін аламыз. Және келесі бағалау орынды:

$$\left\|y^{(3)}\right\|_2\le\|y\|_2+\left\|\sqrt{p}y^{(3)}\right\|_2\le C\|ly\|_2.$$

Осыдан (1.1.2) бойынша, $y^{(3)}\in L_2(\mathbb{R})$.

Егер $y^{(3)}=z\in L_2(\mathbb{R})$ және $\mathcal{L}z=z'+p(x)z$ деп, белгілесек, онда (1.1.1) теңдеуі мына түрге келеді:

$$\mathcal{L}_0z=z'+pz=f\in L_2(\mathbb{R}). \tag{1.1.18}$$

$\mathcal{L}_0v=v'+p(x)v, D(\mathcal{L}_0)=C_0^{(1)}(\mathbb{R})$, операторының $L_2(\mathbb{R})$ - дегі тұйықталуын $\mathcal{L}$ түрінде белгілейміз. (1.1.18) теңдеуінің шешімі деп $\mathcal{L}z=f$ орындалатын $z\in D(\mathcal{L})$ функциясын айтамыз.

Егер (1.1.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (1.1.18) теңдеуінің де шешімі бар. Осыған көз жеткізейік.

Айталық, y (1.1.1) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ қатыстары орындалады. (1.1.10) және (1.1.11) бойынша, y_n үшін $\|y_n\|_2 + \left\|y_n^{(3)}\right\|_2 \le C\|l_0 y_n\|_2 (n = 1,2,\dots,)$ теңсіздігі орынды. Сондықтан $v \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\left\|y_n^{(3)} - v\right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ қатысы орындалады. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан, $v = y^{(3)}$. Демек, осыдан $y_n^{(3)} = z_n$ деп белгілесек, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ үшін $\|z_n - v\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$. Бұл v функциясы (1.1.18) теңдеуінің шешімі болатынын көрсетеді.

Демек, егер (1.1.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (1.1.18) теңдеуінің де шешімі бар. Керісінше, келесі тұжырым орынды.

Лемма 1.1.5. Айталық $p(x)$ Лемма 1.1.3 шарттарын қанағаттандырсын және (1.1.18) теңдеуінің шешімі бар болсын. Онда (1.1.1) теңдеуінің де шешімі табылады.

Дәлелдеу. Айталық $z \in L_2(\mathbb{R})$ (1.1.18) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|z_n - z\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ қатыстары орындалады. $(\mathcal{L} z_n, z_n)$ функционалын Лемма 1.1.1 әдісін қайталай отырып, түрлендіріп,

$$\left\|\sqrt{p} z_n\right\|_2 \le \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$$

екенін көреміз. Айталық $y_n(x)$ келесі $y_n^{(3)} = z_n$ орындалатын функция болсын. Онда $\left\|\sqrt{p} y_n^{(3)}\right\|_2 \le \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$, Макенхаупт теоремасының белгілі салдары [62] бойынша,

$$\|y_n\|_2 \le \gamma_{1,\sqrt{p},3} \left\|\sqrt{p} y_n^{(3)}\right\|_2 \le C_1 \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2, z_n \in C_0^{(1)}(\mathbb{R}).$$

Олай болса, $y_n \in L_2(\mathbb{R})$. Осы және $y_n^{(3)} \in L_2(\mathbb{R})$ қатыстары бойынша, $y_n(x) \in W_2^3(\mathbb{R})$. Соболев кеңістіктері үшін енгізу теоремаларынан y_n – үзіліссіз және $\lim\limits_{|x|\to\infty} y_n(x) = 0$. Ал $y_n^{(3)} \in C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ қатысынан $a > 0$ саны табылып, барлық $|x| > a$ үшін $y_n(x) = 0$ теңдігі орындалады. Сондықтан $y_n(x) \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}) = D(l_0)$. Жоғарыдағы теңсіздік бойынша, $\bar{y} \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\|y_n - \bar{y}\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$. Басқаша айтқанда, $\bar{y}$ - (1.1.1) теңдеуінің шешімі. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.1.6. Айталық $p(x)$ Лемма 1.1.3 шарттарын қанағаттандыратын үзіліссіз дифференциалданатын функция болсын. Онда (1.1.1) теңдеуінің шешімі табылады.

Дәлелдеу. Лемманы дәлелдеу үшін l операторының $R(l)$ мәндер жиыны барлық $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігімен беттесетінін көрсету жеткілікті. 1.1.3 леммасы

бойынша, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \to R(\mathcal{L}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ операторы тұйық. Екіншіден, $R(l) = R(\mathcal{L})$ теңдігі орынды. Шынында да

$$R(\mathcal{L}) = \{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists z \in D(\mathcal{L}), \mathcal{L}z = v\} =$$

$$= \left\{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists y \in D(l), ly = \mathrm{y}^{(4)} + p(x)y^{(3)} = \mathcal{L}z = v\right\} =$$

$$= \{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists y \in D(l), ly = v\} = R(l).$$

Демек лемманы дәлелдеу үшін $R(\mathcal{L}) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсету жеткілікті. Қарсы жориық. $R(\mathcal{L}) \neq L_2(\mathbb{R})$ болсын. Онда нөлдік емес $w \in L_2(\mathbb{R}) \backslash R(\mathcal{L})$ элементі табылады. Жалпылыққа нұқсан келтірмей, w функциясы $R(\mathcal{L})$ жиынына ортогональ деп ұйғарамыз. Сонымен, $w \perp R(\mathcal{L})$, демек әрбір $g \in R(\mathcal{L})$ үшін $(w, g) = 0$. Олай болса, әрбір $z \in D(\mathcal{L})$ үшін $(w, \mathcal{L}z) = 0$ болатынын аламыз. $\mathcal{L}^*$ $\mathcal{L}$- ге түйіндес оператор болсын. Онда

$$(w, \mathcal{L}z) = (\mathcal{L}^* w, z) = 0, \forall w \in D(\mathcal{L}^*), z \in D(\mathcal{L}). \qquad (1.1.19)$$

Алуымыз бойынша, $C_0^{(4)}(\mathbb{R}) \subseteq D(\mathcal{L}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$. Ал (1.1.19) бойынша, $\mathcal{L}^* w \in L_2(\mathbb{R})$ элементі $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$-ге ортогональ. Онда $\mathcal{L}^* w = 0$. Енді $\mathcal{L}^*$ операторының әсерін анықтайық. Әрбір $z \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ үшін келесі теңдік орынды:

$$(\mathcal{L}^* w, z) = (w, \mathcal{L}z) = \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)\left(\overline{z'(x) + p(x)z(x)}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)\overline{z'(x)}dx + \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)p(x)\overline{z(x)}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\overline{w(x)}z'(x)dx} + \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)p(x)\overline{z(x)}dx =$$

$$= w(x)\overline{z(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} w'(x)\overline{z(x)}dx + \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)p(x)\overline{z(x)}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \big(w(x)p(x) - w'(x)\big)\overline{z(x)}dx = (wp - w', z).$$

Сондықтан

$$\mathcal{L}^* w = wp - w' = 0. \tag{1.1.20}$$

Алуымыз бойынша, $w \in D(\mathcal{L}^*) \subseteq L_2(\mathbb{R})$. Онда, $p(x)$ үзіліссіз болғандықтан, (1.1.20)-дан $w' \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$. Демек $w \in W^1_{2,loc}(\mathbb{R})$. Онда $w(x)$- үзіліссіз функция. (1.1.20) теңдеуінің шешімі айқын түрде жазылады:

$$w = ce^{\int_a^x p(t)dt}, c \neq 0.$$

Осыдан

$$|w(x)| = |c|e^{\int_a^x p(t)dt}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Демек, $w(x)$- экспоненциалды өзгеретін функция. Және егер $c > 0$ болса, онда $x \geq a + 1$ болғанда $w(x) \geq c > 0$, ал егер $c < 0$ болса, онда $w(x) \leq c < 0$, $\forall x \geq a + 1$. Олай болса, $|w(x)| \geq |c| > 0$, $\forall x \geq a + 1$. Осыдан

$$\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 dx \geq |c| \int_{\mathbb{R}} dx = +\infty.$$

Яғни w экспоненциалды функция ретінде $L_2(\mathbb{R})$-ге тиісті емес, $w \notin L_2(\mathbb{R})$. Қайшылыққа келдік, ол $R(\mathcal{L}) = L_2(\mathbb{R})$ теңдігі орындалатынын көрсетеді. Лемма дәлелденді.

1.2 Шешімнің максималды регулярлық шарттары

$$\mathcal{L}_{0\lambda} z = z' + (p + \lambda)z \tag{1.2.1}$$

Операторын қарастырайық, мұндағы $D(\mathcal{L}_{0\lambda}) = C_0^{(1)}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. $\mathcal{L}_{0\lambda}$-ның $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуын $\mathcal{L}_\lambda$ деп белгілейміз.

Анықтама 1.2.1. Егер әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)$ үшін

$$\|z'\|_2 + \|pz\|_2 + \lambda\|z\|_2 \leq C\|\mathcal{L}_\lambda z\|_2. \tag{1.2.2}$$

теңсіздігі орындалса, онда $\mathcal{L}_\lambda$ $L_2(\mathbb{R})$-де бөліктенетін оператор деп аталады.

Анықтамадан $\mathcal{L}_\lambda$ $L_2(\mathbb{R})$-де бөліктенетін оператор болуы үшін бір μ саны табылып, $\mathcal{L}_{\lambda+\mu} = \mathcal{L}_\lambda + \mu E$ операторы осы кеңістікте бөліктенетін оператор болуы қажетті және жеткілікті екені шығады. Мынадай тұжырым орынды.

Лемма 1.2.1. Айталық p үзіліссіз функциясы үшін (1.1.2) және

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{p(x)}{p(\eta)}<\infty \tag{1.2.3}$$

шарты орындалсын. Онда

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le M}\frac{p(x)}{p(\eta)}<\infty.$$

Дәлелдеу. Айталық

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{p(x)}{p(\eta)}=N.$$

болсын. $[-M,M]$ аралығын $|x_{k+1}-x_k|\le 1(k=\overline{2,m})$ болатындай $-M=x_1,x_2,\dots,x_m=M$ нүктелерімен бөлеміз. Айталық $\tilde{x}\in[x_1,x_2],\tilde{\eta}\in[x_{m-1},x_m]$. Сонда

$$\sup_{x,\eta\in[-M,M],|x-\eta|\le M}\frac{p(x)}{p(\eta)}\le\sup_{|\tilde{x}-\tilde{\eta}|\le 2M}\frac{p(\tilde{x})}{p(\tilde{\eta})}=$$

$$=\sup_{|\tilde{x}-\tilde{\eta}|\le 2M}\frac{p(\tilde{x})}{p(x_2)}\cdot\frac{p(x_2)}{p(x_3)}\cdot\dots\cdot\frac{p(x_{m-1})}{p(\tilde{\eta})}\le$$

$$\le\sup_{|\tilde{x}-x_2|\le 1}\frac{p(\tilde{x})}{p(x_2)}\cdot\sup_{|x_2-x_3|\le 1}\frac{p(x_2)}{p(x_3)}\cdot\dots\cdot\sup_{|x_{m-1}-\tilde{\eta}|\le 1}\frac{p(x_{m-1})}{p(\tilde{\eta})}\le N^{m-1}.$$

Лемма дәлелденді.

Лемма 1.2.2. Айталық p коэффициенті Лемма 1.1.3-тің және Лемма 1.2.1-дің шарттарын қанағаттандырсын. Онда $\mathcal{L}_\lambda$ операторы $L_2(\mathbb{R})$-де бөліктенетін оператор болады.

Дәлелдеу. Лемма 1.1.3 бойынша, әрбір $\lambda\ge 0$ үшін $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ кері операторы табылады және үзіліссіз. $\mathcal{L}_\lambda$ операторының ең болмағанда бір $\lambda\ge 0$ үшін бөліктенетін оператор болатынын көрсету жеткілікті.

$\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ және $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ интервалдар тізбектерін және $C_0^\infty(\Omega_j)$-ге жататын $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ функциялар тізбегін келесідей етіп таңдап алайық:

a) $\Delta_j=[j,j+1),\ \Omega_j=\left(j-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)(j\in\mathbb{Z})$,

b) $0\le\varphi_j\le 1,\varphi_j(x)=1\ \ \forall x\in\Delta_j(j\in\mathbb{Z}),\ \ \sup_{j\in\mathbb{Z}}\max_{x\in\Delta_j}\left|\varphi_j{}'(x)\right|\le M.$

Онда

$$\left|\Omega_{\mathrm{j}}\right| = 2, \qquad \overline{\Delta_j} \subset \Omega_{\mathrm{j}} \subset \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}, \qquad \Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset \ \ (j \neq k),$$

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_j = \mathbb{R}, \qquad \Omega_{\mathrm{j}} \cap \Omega_{\mathrm{m}} = \emptyset \ \ (|j-m| \geq 2 < \infty)$$

және

$$\sum_j \varphi_j(x)\chi_{\Delta_j}(x) = 1.$$

Мұндағы χ_{Δ_j} - Δ_j интервалының сипаттамалық функциясы. [1]– дің нәтижелері бойынша, b) қасиеті бар $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегі табылады.

Айталық, $p_j(x)(j \in \mathbb{Z})$ берілген $p(x)$ функциясының Ω_{j} интервалындағы тарылуының барлық $\mathbb{R}$-ге үзіліссіз дифференциалданатын және

$$\frac{1}{2}\inf_{\gamma\in\Omega_{\mathrm{j}}} p(\gamma) \leq p_j(x) \leq 2\sup_{\gamma\in\Omega_{\mathrm{j}}} p(\gamma)\,, x \in \ \mathbb{R}, \qquad (1.2.4)$$

шартын қанағаттандыратын жалғасы болсын. Лемма шартына сәйкес, мұндай $p_j(x)(j \in \mathbb{Z})$ жалғасы табылады. $z \in D(\mathcal{L}) = C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ үшін

$$\tilde{\theta}_{j,\lambda} z = z' + \big(p_j(x) + \lambda\big)z$$

деп белгілейік. Айталық $\theta_{j,\lambda}$ осы $\tilde{\theta}_{j,\lambda}$ операторының $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуы болсын.

(1.1.3) теңсіздігін дәлелдеу әдісіне ұқсас жолмен келесі бағаны аламыз

$$\left\|\sqrt{p_j + \lambda z}\right\|_2 \leq \left\|\sqrt{\frac{1}{p_j + \lambda}}\theta_{j,\lambda} z\right\|_2, \quad z \in D\big(\theta_{j,\lambda}\big). \qquad (1.2.5)$$

Шынында да, әрбір $z \in D\big(\tilde{\theta}_{j,\lambda}\big)$ үшін

$$(\tilde{\theta}_{j,\lambda} z, z) = \int_{-\infty}^{\infty} zz'\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (p_j(x) + \lambda)z^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} z\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} (p_j(x) + \lambda)z^2\,dx$$
$$=$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}(p_j(x)+\lambda)z^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(p_j(x)+\lambda)z^2\,dx. \qquad (1.2.6)$$

Екінші жағынан

$$\left|(\tilde{\theta}_{j,\lambda}z, z)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right||z|dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right|\sqrt{\frac{1}{p_j+\lambda}}\sqrt{p_j+\lambda}|z|dx$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right|^2\frac{1}{p_j+\lambda}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(p_j+\lambda)|z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.2.7)$$

(1.2.6) және (1.2.7) теңсіздіктерінен (1.2.5) теңсіздігін аламыз. (1.2.5) теңсіздігі әрбір $z \in D(\theta_{j,\lambda})$ үшін де орынды. Шынында да, егер $z \in D(\theta_{j,\lambda})$, онда

$$\|z_n - z\|_2 \to 0, \;\; \left\|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z_n - \theta_{j,\lambda}z\right\|_2 \to 0 \; (n \to \infty)$$

қатысы орындалатындай $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(\tilde{\theta}_{j,\lambda}) = C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылады. Онда

$$\|z_n\|_2 \to \|z\|_2, \left\|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z_n\right\|_2 \to \left\|\theta_{j,\lambda}z\right\|_2 (n \to \infty).$$

Осы қатыстарды пайдаланып,

$$\left\|\sqrt{p_j+\lambda}z_n\right\|_2 \le \left\|\sqrt{\frac{1}{p_j+\lambda}}\tilde{\theta}_{j,\lambda}z_n\right\|_2, \quad \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(\tilde{\theta}_{j,\lambda}),$$

теңсіздігінде n -ді шексіздікке ұмтылдыра отырып, шекке көшсек, (1.2.5) теңсіздігі шығады.

(1.2.5) теңсіздігінен

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{p_j(x)+\lambda}\,\|z\|_2 \le \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{p_j(x)+\lambda}}\left\|\theta_{j,\lambda}z\right\|_2.$$

Осыдан

$$\|z\|_2 \le \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}(p_j(x)+\lambda)}\left\|\theta_{j,\lambda}z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}). \qquad (1.2.8)$$

(1.2.4) бойынша,

$$\|z\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon}\left\|\theta_{j,\lambda}z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}). \qquad (1.2.9)$$

Демек, $\theta_{j,\lambda}$ - қайтымды оператор. Алуымыз бойынша, $p_j + \lambda$ функциясы Лемма 1.1.4 және Лемма 1.1.6 шарттарын қанағаттандырады. Онда $\theta_{j,\lambda}^{-1} (j \in \mathbb{Z})$ операторы шенелген. Айталық, $f \in C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ болсын. M_λ және B_λ операторларын мынадай теңдіктермен енгізейік:

$$M_\lambda f = \sum_j \varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right),$$

$$B_\lambda f = \sum_j \varphi_j{}' \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right).$$

f финитті функция болғандықтан, соңғы өрнектердің оң жақтарында шекті қосындылар тұр. $x \in \Omega_{\mathrm{j}}$ болғанда $\mathcal{L}_\lambda$ операторының әсері $\theta_{j,\lambda}$ операторының әсерімен бірдей (себебі коэффициенттері беттеседі). $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_{\mathrm{j}})$ екенін ескерсек, онда

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f) = \sum_j \mathcal{L}_\lambda\left(\varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \theta_{j,\lambda}\left(\varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) = \sum_j \left(\varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' + \sum_j (p_j + \lambda)\left(\varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \varphi_j{}'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) + \sum_j \varphi_j\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' + \sum_j (p_j + \lambda)\left(\varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \varphi_j{}'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) + \sum_j \varphi_j\left(\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' + (p_j + \lambda)\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_j \varphi_j{}'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) + \sum_j \varphi_j\left(\theta_{j,\lambda}\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \varphi_j{}'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j_j}} f\right)\right) + \left(\sum_j \varphi_j \chi_{\Delta_j}\right) f = (B_\lambda + E) f.$$

Сонымен

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f) = (B_\lambda + E)f \qquad (1.2.10)$$

Мұндағы E - бірлік оператор. Әртүрлі j-лер үшін Ω_j интервалдарының ең көп дегенде екеуі ғана өзара қиылысады. Сондықтан келесі теңсіздіктер орынды:

$$\|B_\lambda f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |B_\lambda f|^2 dx =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} |B_\lambda f|^2 dx \leq \sum_j \int_{\Delta_j} \left[\sum_{k=j-1}^{j+1} |\varphi_k{}'(x)| \left|\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right| \right]^2 dx \leq$$

$$\leq 3 \sum_j \int_{\Delta_j} \sum_{k=j-1}^{j+1} |\varphi_k'(x)|^2 \left|\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right|^2 dx \leq 3M^2 \sum_j \int_{\Delta_j} \sum_{k=j-1}^{j+1} \left|\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right|^2 dx =$$

$$= 3M^2 \sum_j \int_{\Delta_j} \left(\left|\theta_{j-1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-1}} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j+1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+1}} f\right)\right|^2 \right) dx =$$

$$= 3M^2 [+ \cdots + \int_{\Delta_{j-1}} \left(\left|\theta_{j-2,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-2}} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j-1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-1}} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 \right) dx +$$

$$+ \int_{\Delta_j} \left(\left|\theta_{j-1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-1}} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j+1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+1}} f\right)\right|^2 \right) dx +$$

$$+ \int_{\Delta_{j+1}} \left(\left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j+1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+1}} f\right)\right|^2 + \left|\theta_{j+2,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+2}} f\right)\right|^2 \right) dx + \cdots +] =$$

$$= 3M^2 \sum_j \int_{\Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}} \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq 3M^2 \sum_j \int_{\mathbb{R}} \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx =$$

$$= 3M^2 \sum_j \left\| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right\|_2^2.$$

Сонымен

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 3M^2 \sum_j \left\| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right\|_2^2. \qquad (1.2.11)$$

(1.2.9) теңсіздігінен

$$\left\| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \left\| \chi_{\Delta_j} f \right\|_2 \ (j \in \mathbb{Z}). \qquad (1.2.12)$$

Осыдан

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \sum_j \left\| \chi_{\Delta_j} f \right\|_2^2 = 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \sum_j \int_{\mathbb{R}} \left| \chi_{\Delta_j} f(x) \right|^2 dx =$$

$$= 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_j \left(\chi_{\Delta_j} \right)^2 \right] f^2(x) dx =$$

$$= 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \|f\|_2^2.$$

Немесе

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 3M^2 \left(\frac{2\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^2 \|f\|_2^2. \qquad (1.2.13)$$

$0 < \theta < 1$ болсын. Егер $\lambda_0 = \frac{2\sqrt{3}M\varepsilon - \theta}{\theta\varepsilon}$ деп алсақ, онда әрбір $\lambda \geq \lambda_0$ үшін

$$\|B_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \leq \theta \qquad (1.2.14)$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})}$ – операторлық норма. Онда Банахтың белгілі теоремасы бойынша, әрбір $\lambda \geq \lambda_0$ үшін $E + B_\lambda$ операторы қайтымды және кері $(E + B_\lambda)^{-1}$ операторы шектелген. Келесі теңсіздік орынды

$$\frac{1}{1+\theta} \leq \|(E + B_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\theta} (\lambda \geq \lambda_0), \qquad (1.2.15)$$

Шынында да, (1.2.14) теңсіздігі бойынша,

$$1-\theta \le |\|E\| - \|B_\lambda\|| \le \|(E+B_\lambda)\| (\lambda \ge \lambda_0),$$

онда

$$\|(E+B_\lambda)\|^{-1} = \|(E+B_\lambda)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\theta} (\lambda \ge \lambda_0). \qquad (1.2.16)$$

Екінші жағынан

$$\|E+B_\lambda\| \le \|E\| + \|B_\lambda\| \le 1+\theta \ \ (\lambda \ge \lambda_0).$$

Онда

$$\|(E+B_\lambda)\|^{-1} = \|(E+B_\lambda)^{-1}\| \ge \frac{1}{1+\theta}. \qquad (1.2.17)$$

(1.2.16) және (1.2.17) теңсіздіктерінен (1.2.15) шығады.
(1.2.10) теңдігінен алатынымыз

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda (E+B_\lambda)^{-1}, \lambda \ge \lambda_0. \qquad (1.2.18)$$

Енді $\left\|(p+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\|$ нормасын бағалайық. (1.2.15) және (1.2.18) бойынша,

$$\left\|(p+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\theta} \|(p+\lambda)M_\lambda\|.$$

Және

$$\|(p+\lambda)M_\lambda f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} (p(x)+\lambda)^2 \left| \sum_{k=j-1}^{j+1} \varphi_k(x) \theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f) \right|^2 dx \le$$

$$\le 3 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} (p(x)+\lambda)^2 \left(\left| \varphi_{j-1} \theta_{j-1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j-1}} f \right) \right|^2 + \left| \varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \varphi_{j+1} \theta_{j+1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j+1}} f \right) \right|^2 \right) dx \le$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Delta_j} p(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j\cup\Delta_{j+1}} \left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Omega_j} \left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx$$

(1.2.8) теңсіздігі және $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ функциялар тізбегінің b) қасиеті бойынша,

$$3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \frac{1}{\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} p_j(x)+\lambda\right)^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\inf_{x\in\Omega_j} p(x)+\lambda\right)^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 12\left(\frac{\sup_{x\in\Omega_j} \quad p(x)+\lambda}{\inf_{t\in\Omega_j} p(t)+\lambda}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_{\Delta_j}^2\right) f^2(x)dx \leq$$

$$\leq 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j} \frac{p(x)}{p(t)}+\lambda\varepsilon\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_{\Delta_j}^2\right) f^2(x)dx =$$

$$= 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{p(x)}{p(t)} + \lambda\varepsilon\right)^2 \|f\|_2^2.$$

Лемма 1.2.1 бойынша,

$$\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{p(x)}{p(t)} \leq N^2.$$

Сонымен

$$\|(p+\lambda)M_\lambda f\|_2^2 \leq 12(N^2+\lambda\varepsilon)^2\|f\|_2^2. \qquad (1.2.19)$$

Онда әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)(\lambda \geq \lambda_0)$ үшін $\left(\mathcal{L}_\lambda z = f, z = \mathcal{L}_\lambda^{-1} f\right)$ болғандықтан, (1.2.18) бойынша,

$$\|(p+\lambda)z\|_2 = \left\|(p+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1} f\right\|_2 = \|(p+\lambda)M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1}f\|_2.$$

$(E+B_\lambda)^{-1}f = g(\lambda \geq \lambda_0)$ деп белгілейік. Сонда

$$\|(p+\lambda)z\|_2 = \|(p+\lambda)M_\lambda g\|_2 \leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\|g\|_2 =$$

$$= 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\|(E+B_\lambda)^{-1}f\|_2 \leq$$

$$\leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\|(E+B_\lambda)^{-1}\|\|f\|_2 \leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2,$$

$$\|(p+\lambda)z\|_2 \leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2. \qquad (1.2.20)$$

$\lambda > 0$ және $p > 0$ болғандықтан

$$\|\lambda z\|_2 \leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2, \qquad (1.2.21)$$

$$\|pz\|_2 \leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2. \qquad (1.2.22)$$

Онда (1.2.1)-ден

$$\|z'\|_2 = \|(p+\lambda)z - \mathcal{L}_\lambda z\|_2 \leq \|(p+\lambda)z\|_2 + \|\mathcal{L}_\lambda z\|_2 \leq$$

$$\leq 2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2+\|f\|_2$$

$$\|z'\|_2 \leq (2\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}+1)\|f\|_2. \qquad (1.2.23)$$

(1.2.20), (1.2.21), (1.2.23) теңсіздіктерінен әрбір $z\in D(\mathcal{L}_\lambda)(\lambda\geq\lambda_0)$ үшін

$$\|z'\|_2+\|pz\|_2+\|\lambda z\|_2 \leq (6\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}+1)\|f\|_2. \qquad (1.2.24)$$

Бұл (1.2.2) теңсіздігі. Лемма дәлелденді.

$\mathcal{L}$ операторы бөліктенетін болғандықтан $y^{(3)}=z$ екенін ескеріп келесі бағаны аламыз

$$\|y^{(4)}\|_2+\|py^{(3)}\|_2+\|\lambda y^{(3)}\|_2 \leq \left(6\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta}+1\right)\|f\|_2. \quad (1.2.25)$$

бағасын аламыз. Бұл l операторы да, бөліктенетінін көрсетеді.

Ескерту 1.2.1. Лемма 1.1.1-де (1.1.2) шартын $p(x)\geq 1$- мен алмастыруға болады. Шынында да, (1.1.2) теңсіздігінен $\frac{1}{\delta}\leq p(x)$. $x=\delta^{-1}t$ деп алып, $y(x)=y(\delta^{-1}t)=\hat{y}(t)$ және $p(x)=\hat{p}(t)$ белгілеулерін жасаймыз, мұндағы $t\in\mathbb{R}$. Сонда $l\mathrm{y}=\mathrm{y}^{(4)}+p(x)y^{(3)}$ өрнегі былай жазылады:

$$\hat{l}\hat{y}(t)=\hat{y}^{(4)}(t)+\delta^{-1}\hat{p}(t)\hat{y}^{(3)}(t).$$

Осыдан

$$\delta^{-1}\hat{p}(t)\geq\frac{1}{\delta}\ \delta=1.$$

Теорема 1.2.1. Айталық $p(x)\geq 1$ функциясы $\gamma_{1,\sqrt{p},3}<\infty$ қатысын қанағаттандырсын. Онда әрбір $f\in L_2(\mathbb{R})$ үшін (1.1.1) теңдеуінің y шешімі табылады және ол жалғыз ғана. Ал егер, сонымен бірге

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq M}\frac{p(x)}{p(\eta)}<\infty$$

қатысы орындалса, онда y шешімі

$$\|y^{(4)}\|_2+\|py^{(3)}\|_2+\|y\|_2\leq C\|f\|_2 \qquad (1.2.26)$$

теңсіздігін қанағаттандырады, басқаша айтқанда, максималды регулярлы.

Дәлелдеу. $\gamma_{1,\sqrt{p},3}<\infty$ шартынан

$$\|y\|_2 \le \gamma_{1,\sqrt{p},3}\|f\|_2$$

бағасы шығады. Осыдан және (1.2.25) теңсіздігінен

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \left\|py^{(3)}\right\|_2 + \|y\|_2 \le \left(6\sqrt{3}(N^2+\lambda\varepsilon)\frac{1}{1-\theta} + \gamma_{1,\sqrt{p},3} + 1\right)\|f\|_2.$$

Теорема дәлелденді.

Мысал 1.2.1. Келесі теңдеуді қарастырайық

$$y^{(4)} + (10x^4+3x^2+4)^3 y^{(3)} = f(x). \qquad (1.2.27)$$

Бұл жерде $x \in \mathbb{R}, f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. $(10x^4+3x^2+4)^3$ коэффициенті Теорема 1.2.1-дің шарттарын қанағаттандыратынына көз жеткізейік. $(10x^4+3x^2+4)^3$ – жұп функция, сол себепті

$$\gamma_{1,\sqrt{(10x^4+3x^2+4)^3},3} = \max\left(\sup_{x>0}\left(\int_0^x dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^\infty t^4\left(\sqrt{(10t^4+3t^2+4)^3}\right)^{-2} dt\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\sup_{x<0}\left(\int_x^0 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^x s^4\left(\sqrt{(10s^4+3s^2+4)^3}\right)^{-2} ds\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le$$

$$\max\left(\sup_{x>0}\frac{\sqrt{x}}{(10x^4+3x^2+4)}\left(\int_x^\infty \frac{t^4}{(10t^4+3t^2+4)^2}dt\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\sup_{x<0}\frac{\sqrt{-x}}{(10x^4+3x^2+4)}\left(\int_{-\infty}^x \frac{s^4}{(10s^4+3s^2+4)^2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \infty.$$

Әрі қарай

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(10x^4+3x^2+4)^3}{(10\eta^4+3\eta^2+4)^3} < \infty$$

болатынын көрсетейік. $|x-\eta| \le 1$ болғандықтан, $|x| \le 1 + |\eta|$, онда

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(10x^4+3x^2+4)^3}{(10\eta^4+3\eta^2+4)^3} \le$$

$$\leq \sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq 1} \frac{(10(1+|\eta|)^4+3(1+|\eta|)^2+4)^3}{(10\eta^4+3\eta^2+4)^3} \leq$$

$$\leq \sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq 1} \frac{(80(1+\eta^4)+6(1+\eta^2)+4)^3}{(10\eta^4+3\eta^2+4)^3} \leq$$

$$\leq \sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq 1} \frac{\left(23(10\eta^4+3\eta^2+4)\right)^3}{(10\eta^4+3\eta^2+4)^3} = 12167$$

Демек, Теорема 1.2.1 бойынша, (1.2.27) теңдеуінің жалғыз ғана $y(x)$ шешімі бар және ол келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \left\|(10x^4+3x^2+4)^3 y^{(3)}\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|f\|_2.$$

2 ЕКІНШІ РЕТТІ АРАЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІЛУ ЖӘНЕ КОЭРЦИТИВТІЛІК ШАРТТАРЫ

2.1 Төртінші ретті бір минималды дифференциалдық оператор туралы

$$l_0y = -\mathrm{y}^{(4)} + r(x)y^{(2)} = f(x), \qquad (2.1.1)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$,$r(x) > 0$ екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$- төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған $l_0\mathrm{y} = -\mathrm{y}^{(4)} + r(x)y^{(2)}$ операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. $ly = f$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін (2.1.1) теңдеуінің шешімі деп атаймыз.

Лемма 2.1.1. Айталық $r(x)$ функциясы

$$r(x) \geq \delta > 0 \qquad (2.1.2)$$

шартын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{r}y^{(2)}\right\|_2 \leq \left\|\frac{l_0y}{\sqrt{r}}\right\|_2. \qquad (2.1.3)$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. Онда $A = \left(l_0y, y^{(2)}\right)$ скалярлық көбейтіндісі анықталған. y функциясы финитті болғандықтан, келесі теңдіктер орынды

$$A = -\int_{-\infty}^{\infty} y^{(4)}(x)y^{(2)}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[y^{(2)}(x)\right]^2 dx =$$

$$= -y^{(3)}(x)y^{(2)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\left[y^{(3)}(x)\right]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[y^{(2)}(x)\right]^2 dx =$$

$$= \left\|y^{(3)}\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{r}y^{(2)}\right\|_2^2. \qquad (2.1.4)$$

Екінші жағынан (2.1.2) шартын және Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\left\|\sqrt{r}y^{(2)}\right\|_2^2 \leq A \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(l_0y)(x)|\left|y^{(2)}(x)\right|dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |(l_0 y)(x)| \frac{1}{\sqrt{r(x)}} \sqrt{r(x)} |y^{(2)}| dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{r(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} r(x) |y^{(2)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

екенін аламыз. Осыдан

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} r(x) |y^{(2)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{r(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.1.5)$$

$y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ элементі үшін (2.1.3) теңсіздігін алдық. (2.1.2) шарты орындалғанда, (2.1.3)-тің оң жағы шенелген. Лемма дәлелденді.

Лемма 2.1.2. Айталық $r(x)$ функциясы (2.1.2) және $\gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда l операторы қайтымды және әрбір $y \in D(l)$ үшін

$$\left\| \sqrt{r} y^{(2)} \right\|_2 + \|y\|_2 \leq C \|ly\|_2. \qquad (2.1.6)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ болсын. $\gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty$ шарты мен (2.1.3) бағасы және Лемма 1.1.2 бойынша, мына теңсіздіктер орынды

$$\|y\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{r},2} \left\| \sqrt{r} y^{(2)} \right\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{r},2} \left\| \frac{l_0 y}{\sqrt{r}} \right\|_2.$$

Осыдан және (2.1.2) қатысынан

$$\left\| \sqrt{r} y^{(2)} \right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y\|_2 \qquad (2.1.7)$$

және

$$\|y\|_2 \leq \frac{2\gamma_{1,\sqrt{r},2}}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y\|_2. \qquad (2.1.8)$$

(2.1.7), (2.1.8) бағалары әрбір $y \in D(l)$ үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. Онда l операторы l_0 -дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \ \ \|l_0 y_n - ly\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \ \|l_0 y_n\|_2 \to \|ly\|_2 (n \to \infty). \tag{2.1.9}$$

(2.1.8) және (2.1.7) бойынша

$$\|y_n\|_2 \le \frac{2\gamma_{1,\sqrt{r},2}}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y_n\|_2 \tag{2.1.10}$$

және

$$\left\|\sqrt{r} y_n^{(2)}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y_n\|_2. \tag{2.1.11}$$

Екіншіден (2.1.8), (2.1.7) және (2.1.9) бойынша, әрбір n, m номерлері үшін

$$\left\|\sqrt{r} y_n^{(2)} - \sqrt{r} y_m^{(2)}\right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \le C\|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2. \tag{2.1.12}$$

$y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$. Алуымыз бойынша, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 = 0$. (2.1.12)-ден $\left\{\sqrt{r} y_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sqrt{r} y_n^{(2)} - \sqrt{r} y^{(2)}\right\|_2 = 0,$$

демек

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sqrt{r} y_n^{(2)}\right\|_2 = \left\|\sqrt{r} y^{(2)}\right\|_2.$$

Осыны ескеріп, (2.1.9)– теңсіздігінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз

$$\|y\|_2 \le \frac{2\gamma_{1,\sqrt{r},2}}{\sqrt{\delta}} \|ly\|_2, \tag{2.1.13}$$

$$\left\|\sqrt{r} y^{(2)}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|ly\|_2. \tag{2.1.14}$$

Теңсіздіктерді мүшелей қосып, (2.1.6) - ны аламыз. Лемма дәлелденді.

2.2 Екінші ретті аралық коэффициенті бар дифференциалдық теңдеудің шешілу шарттары

$$l_0 y = -y^{(4)} + r(x)y^{(2)} = f(x), \qquad (2.2.1)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x \in \mathbb{R}$, $r(x) > 0$ - екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$- төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған $l_0 y = -y^{(4)} + r(x)y^{(2)}$ операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. $ly = f$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін (2.1.1) теңдеуінің шешімі деп атаймыз.

Лемма 2.2.1. Айталық $r(x)$ үшін Лемма 2.1.2 шарттары орындалсын. Онда (2.2.1) теңдеуінің шешімі y жалғыз ғана.

Дәлелдеу. Қарсы жориық. Айталық Лемма 2.1.2 шарттары орындалып, y пен z (2.2.1) теңдеуінің әртүрлі екі шешімі болсын. Онда $y, z \in D(l)$, $y \neq z$, $ly = f$ және $lz = f$. Егер $v = y - z$ деп белгілесек, онда $v \in D(l)$ және $lv = 0$. (2.1.6) бағасы бойынша, $\|v\|_2 = 0$. Демек $y = z$. Лемма дәлелденді.

Айталық, Лемма 2.1.2 шарттары орындалсын. $y \in D(l)$ элементін алып, $z = y^{(2)}$ және $\mathcal{L}z = -z'' + r(x)z$ деп белгілейік.

Лемма 2.2.2. Егер $r(x)$ Лемма 2.1.2 шарттарын қанағаттандырса, онда $\mathcal{L}$ операторы $L_2(\mathbb{R})$ - де анықталған және тұйық.

Дәлелдеу. $z \in D(\mathcal{L})$ болса, онда $z = y^{(2)}, y \in D(l)$. (2.1.2) шарты бойынша, (2.1.6) теңсіздігінен $y^{(2)} \in L_2(\mathbb{R})$. Демек $D(\mathcal{L})$ - $L_2(\mathbb{R})$ - дің ішкі жиыны. Енді $\mathcal{L}$ тұйық оператор екенін көрсетейік. $y \in D(l)$ үшін, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \ \ \|l_0 y_n - ly\|_2 \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (2.2.2)$$

қатыстары орындалады. Онда (2.1.6) теңсіздігін пайдаланып, Лемма 2.1.2 -нің дәлелдеуіндегі сияқты,

$$\left\| y_n^{(2)} - y^{(2)} \right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (2.2.3)$$

қатысын аламыз. $z_n = y_n^{(2)}$ $(n \in N)$ деп белгілесек, онда $z_n \in C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ және (2.2.2) мен (2.2.3)- тен

$$\|z_n - z\|_2 \to 0, \ \ \|\mathcal{L}z_n - \mathcal{L}z\|_2 \to 0 \ (n \to \infty).$$

Лемма дәлелденді.

(2.2.1) теңдеуін былайша жазайық

$$\mathcal{L}_0 z = -z'' + rz = f. \qquad (2.2.4)$$

$\mathcal{L}_0 v = -v'' + r(x)v, D(\mathcal{L}_0) = C_0^{(2)}(\mathbb{R})$, операторының $L_2(\mathbb{R})$ - дегі тұйықталуын $\mathcal{L}$ түрінде белгілейміз. (2.2.4) теңдеуінің шешімі деп $\mathcal{L}z = f$ орындалатын $z \in D(\mathcal{L})$ функциясын айтамыз.

Егер (2.2.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (2.2.4) теңдеуінің де шешімі бар. Осыны көрсетейік.

y - (2.2.1) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатыстары орындалады. (2.1.10) және (2.1.12) бойынша, y_n үшін $\|y_n\|_2 + \left\|y_n^{(2)}\right\|_2 \leq C\|l_0 y_n\|_2 (n = 1,2,\ldots,)$ теңсіздігі орынды. Сондықтан $v \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\left\|y_n^{(2)} - v\right\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатысы орындалады. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан $v = y^{(2)}$. Демек, осыдан $y_n^{(2)} = z_n$ деп белгілесек, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ үшін $\|z_n - v\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Бұл дегеніміз, v - (2.2.4) теңдеуінің шешімі екенін білдіреді.

Демек, егер (2.2.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (2.2.4) теңдеуінің де шешімі бар. Керісінше, келесі тұжырым орынды.

Лемма 2.2.3. Айталық $r(x)$ Лемма 2.1.2 шарттарын қанағаттандырсын және (2.2.4) теңдеуінің шешімі бар болсын. Онда (2.2.1) теңдеуінің де шешімі бар.

Дәлелдеу. Айталық $z \in L_2(\mathbb{R})$ (2.2.4) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|z_n - z\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатыстары орындалады. $(\mathcal{L}z_n, z_n)$ функционалын Лемма 2.1.1 әдісін қайталай отырып, түрлендіріп,

$$\left\|\sqrt{r} z_n\right\|_2 \leq \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$$

екенін көреміз. Айталық $y_n(x)$ келесі $y_n^{(2)} = z_n$ орындалатын функция болсын. Онда $\left\|\sqrt{r} y_n^{(2)}\right\|_2 \leq \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$. Лемма 1.1.2 бойынша,

$$\|y_n\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{r},2} \left\|\sqrt{r} y_n^{(2)}\right\|_2 \leq C_1 \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2, z_n \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}).$$

Олай болса $y_n \in L_2(\mathbb{R})$. Осы және $y_n^{(2)} \in L_2(\mathbb{R})$ қатыстары бойынша, $y_n(x) \in W_2^2(\mathbb{R})$. Соболев кеңістіктері үшін енгізу теоремаларынан y_n – үзіліссіз және $\lim\limits_{|x| \to \infty} y_n(x) = 0$. Ал $y_n^{(2)} \in C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ қатысынан $a > 0$ саны табылып, барлық $|x| > a$ үшін $y_n(x) = 0$ теңдігі орындалады. Сондықтан $y_n(x) \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}) = D(l_0)$. Жоғарыдағы теңсіздік бойынша, $\bar{y} \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\|y_n - \bar{y}\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ орындалады. Басқаша айтқанда, $\bar{y}$ - (2.2.1) теңдеуінің шешімі. Лемма дәлелденді.

Лемма 2.2.4. Айталық $r(x)$ функциясы Лемма 2.1.2 шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ үшін (2.2.1) теңдеуінің шешімі табылады.

Дәлелдеу. Лемма 2.1.2 бойынша, l операторы қайтымды және оның мәндерінің $R(l)$ жиыны тұйық. Шешімнің анықтамасы бойынша, $R(l)$ барлық $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігімен беттесетінін көрсету жеткілікті.

$R(l) = R(\mathcal{L})$ орындалады. Шынында да

$$R(\mathcal{L}) = \{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists z \in D(\mathcal{L}), \mathcal{L}z = v\} =$$

$$= \left\{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists y \in D(l), ly = -\mathrm{y}^{(4)} + r(x)y^{(2)} = \mathcal{L}z = v\right\} =$$

$$= \{v \in L_2(\mathbb{R}): \exists y \in D(l), ly = v\} = R(l).$$

$R(\mathcal{L}) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетейік. Қарсы жориық. $R(\mathcal{L}) \neq L_2(\mathbb{R})$ болсын. Онда нөлдік емес бір $w \in L_2(\mathbb{R}) \backslash R(\mathcal{L})$ элементі табылады. Жалпылыққа нұқсан келтірмей, w функциясы $R(\mathcal{L})$-ге ортогональ деп ұйғарамыз: $w \perp R(\mathcal{L})$. Демек, $(w, g) = 0,\ g \in R(\mathcal{L})$. Ендеше $(w, \mathcal{L}z) = 0$, $z \in D(\mathcal{L})$. Осыдан, егер $\mathcal{L}^*$ деп $\mathcal{L}$ −ге түйіндес операторды белгілесек,

$$(\mathcal{L}^* w, z) = 0, \forall w \in D(\mathcal{L}^*), z \in D(\mathcal{L}). \qquad (2.2.5)$$

Алуымыз бойынша, $C_0^{(4)}(\mathbb{R}) \subseteq D(\mathcal{L}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$, онда $D(\mathcal{L})$ жиыны $L_2(\mathbb{R})$-де тығыз. Ал (2.2.5) бойынша, $\mathcal{L}^* w \in L_2(\mathbb{R})$ элементі $D(\mathcal{L})$- ға ортогональ. Онда $\mathcal{L}^* w = 0$. $r > 0$ болғандықтан, $\mathcal{L}$ Штурм-Лиувилль операторы өзіне түйіндес екені белгілі. $D(\mathcal{L}^*) = D(\mathcal{L})$ және $\mathcal{L}w = \mathcal{L}^* w = 0$. Онда, (2.1.6) бойынша, $\|w\|_2 \leq 0$, немесе $w = 0$. Қайшылық алдық. Лемма дәлелденді.

2.3 Екімүшелі оператордың бөліктену және максималды регулярлық шарттары

Келесі

$$\mathcal{L}_{0\lambda} z = -z'' + (r + \lambda)z\,,\ D(\mathcal{L}_{0\lambda}) = C_0^{(2)}(\mathbb{R}),$$

операторын қарастырайық. Мұндағы $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. $\mathcal{L}_{0\lambda}$-ның $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуын $\mathcal{L}_\lambda$ деп белгілейміз.

Анықтама 2.3.1. Егер әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)$ үшін келесі теңсіздік орындалса

$$\|z''\|_2 + \|rz\|_2 + \lambda\|z\|_2 \leq C\|\mathcal{L}_\lambda z\|_2, \qquad (2.3.1)$$

онда $\mathcal{L}_\lambda$ операторы $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігінде бөліктенеді дейміз.

Лемма 2.3.1. Айталық r коэффициенті Лемма 2.1.2 -нің шартын және

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{r(x)}{r(\eta)}<\infty \qquad (2.3.2)$$

қатысын қанағаттандырсын. Онда $\mathcal{L}_\lambda$ операторы $L_2(\mathbb{R})$ - де бөліктенеді.

Дәлелдеу. Лемма 2.1.2 бойынша, $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ $(\lambda\ge 0)$ кері операторы табылады және үзіліссіз. $\mathcal{L}_\lambda$ операторының ең болмағанда бір $\lambda\ge 0$ үшін бөліктенетін оператор болатынын көрсету жеткілікті.

$\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ және $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ интервалдар тізбектерін және $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(\Omega_j)$ функцияларының $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегін келесідей етіп таңдап алайық:

$$a)\qquad \Delta_j=[j,j+1),\qquad \Omega_j=\left(j-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)(j\in\mathbb{Z}),$$

$$b)\qquad 0\le\varphi_j\le 1,\ \ \varphi_j(x)=1\ \ \forall x\in\Delta_j(j\in\mathbb{Z}),$$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{x\in\Omega_j}\left(|\varphi_j{}'(x)|,|\varphi_j{}''(x)|\right)\le M.$$

Онда

$$|\Omega_j|=\sup_{x,\theta\in\Omega_j}|x-\theta|=2,\qquad \bar{\Delta}_j\subset\Omega_j\subset\Delta_{j-1}\cup\Delta_j\cup\Delta_{j+1},$$

$$\Delta_j\cap\Delta_k=\emptyset\ \ (j\ne k),\qquad \bigcup_{j=-\infty}^{\infty}\Delta_j=\mathbb{R},$$

$$\Omega_j\cap\Omega_m=\emptyset\ \ (|j-m|\ge 2),\qquad \sum_j\varphi_j(x)\chi_{\Delta_j}(x)=1.$$

Мұндағы χ_{Δ_j} - Δ_j интервалының сипаттамалық функциясы. $b)$ қатыстарын қанағаттандыратын $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегі әрқашан табылатынын еске саламыз [24]. $r_j(x)(j\in\mathbb{Z})$ деп берілген $r(x)$ - тің интервал Ω_j $(j\in\mathbb{Z})$ - ден барлық $\mathbb{R}$-ге жалғастыруын белгілейік. $r_j(x)$ функциясын үзіліссіз дифференциалданатын және

$$\frac{1}{2}\inf_{z\in\Omega_j}r(z)\le r_j(x)\le 2\sup_{z\in\Omega_j}r(z),x\in\ \mathbb{R}, \qquad (2.3.3)$$

теңсіздіктері орындалатындай етіп алайық. (2.3.2) шарты бойынша, мұндай жалғастыру табылады [24].

$$\tilde{\theta}_{j,\lambda}z = -z'' + (r_j + \lambda)z,\ D(\tilde{\theta}_{j,\lambda}) = C_0^{(2)}(\mathbb{R}),$$

операторын алып, оның $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуын $\theta_{j,\lambda}$ деп белгілейік. $(2.1.4)$ теңсіздігін дәлелдеу әдісіне ұқсас жолмен келесі бағаны аламыз

$$\left\|\sqrt{r_j + \lambda}z\right\|_2 \le \left\|\sqrt{\frac{1}{r_j + \lambda}}\theta_{j,\lambda}z\right\|_2, \quad z \in D(\theta_{j,\lambda}). \qquad (2.3.4)$$

Шынында да, әрбір $z \in D(\tilde{\theta}_{j,\lambda})$ үшін

$$(\tilde{\theta}_{j,\lambda}z, z) = -\int_{-\infty}^{\infty} zz''\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (r_j(x) + \lambda)z^2\,dx =$$

$$= -zz'|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (z')^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (r_j(x) + \lambda)z^2\,dx =$$

$$= \|z'\|_2^2 + \left\|\sqrt{r_j(x) + \lambda}z\right\|_2^2 \qquad (2.3.5)$$

Екінші жағынан

$$\left\|\sqrt{r_j + \lambda}z\right\|_2^2 \le \left|(\tilde{\theta}_{j,\lambda}z, z)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right| |z| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right| \sqrt{\frac{1}{r_j + \lambda}}\sqrt{r_j + \lambda}|z| dx$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right|^2 \frac{1}{r_j + \lambda}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (r_j + \lambda)|z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\|\sqrt{\frac{1}{r_j + \lambda}}\tilde{\theta}_{j,\lambda}z\right\|_2 \left\|\sqrt{r_j + \lambda}z\right\|_2 \qquad (2.3.6)$$

(2.3.5) және (2.3.6) теңсіздіктерінен $z \in D(\tilde{\theta}_{j,\lambda})$ үшін (2.3.4) бағасы шығады. (2.3.4) әрбір $z \in D(\theta_{j,\lambda})$ үшін де орындалатынын көрсетейік. Шынында да, $\theta_{j,\lambda}$ операторының таңдалуына сәйкес, $z \in D(\theta_{j,\lambda})$ үшін

$$\|z_n - z\|_2 \to 0,\ \left\|\tilde{\theta}_{j,\lambda}z_n - \theta_{j,\lambda}z\right\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

қатыстары орындалатындай $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(\tilde{\theta}_{j,\lambda}) = C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылады. Онда

$$\|z_n\|_2 \to \|z\|_2, \ \left\|\tilde{\theta}_{j,\lambda} z_n\right\|_2 \to \left\|\theta_{j,\lambda} z\right\|_2 (n \to \infty).$$

Осы қатыстарды пайдаланып,

$$\left\|\sqrt{r_j + \lambda} z_n\right\|_2 \le \left\|\sqrt{\frac{1}{r_j + \lambda}} \tilde{\theta}_{j,\lambda} z_n\right\|_2, \quad \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(\tilde{\theta}_{j,\lambda}),$$

теңсіздігінде n -ді шексіздікке ұмтылдыра отырып, шекке көшсек, (2.3.4) теңсіздігіне келеміз. (2.3.4) -тен

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{r_j(x) + \lambda} \|z\|_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{r_j(x) + \lambda}} \left\|\theta_{j,\lambda} z\right\|_2.$$

ендеше

$$\|z\|_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} (r_j(x) + \lambda)} \left\|\theta_{j,\lambda} z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}). \qquad (2.3.7)$$

(2.3.3) – ті ескерсек,

$$\|z\|_2 \le \frac{2}{\delta + 2\lambda} \left\|\theta_{j,\lambda} z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}) \qquad (2.3.8)$$

екенін аламыз. Демек, $\theta_{j,\lambda}$ - қайтымды оператор. Алуымыз бойынша $r_j + \lambda$ Лемма 2.2.1 және Лемма 2.2.4 шарттарын қанағаттандырады. Онда сол леммалар бойынша, $\theta_{j,\lambda}^{-1} (j \in \mathbb{Z})$ операторы шенелген. Ал (2.3.5), (2.3.6) және (2.3.8) теңсіздіктерінен

$$\|z'\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta + 2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\theta_{j,\lambda} z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}) \qquad (2.3.9)$$

екенін көреміз. Айталық $f \in C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ болсын. M_λ және B_λ операторларын былайша енгізейік:

$$M_\lambda f = \sum_j \varphi_j \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f\right),$$

$$B_\lambda f = -\sum_j \varphi_j{}''\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right) - 2\sum_j \varphi_j'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'.$$

f финитті функция болғандықтан, соңғы өрнектердің оң жақтарында шекті қосындылар тұр. $x \in \Omega_{\mathrm{j}}$ болғанда $\mathcal{L}_\lambda$ операторының әсері $\theta_{j,\lambda}$ операторының әсерімен бірдей (себебі олардың коэффициенттері беттеседі). Осыны және $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_{\mathrm{j}})$ қатысын ескерсек, онда

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f) = \sum_j \mathcal{L}_\lambda\left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) = \sum_j \theta_{j,\lambda}\left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$-\sum_j \left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'' + \sum_j (r_j+\lambda)\left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= -\sum_j \left(\varphi_j'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)\right)'$$

$$-\sum_j \left(\varphi_j\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right)' + \sum_j (r_j+\lambda)\left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= -\sum_j \varphi_j''\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) - 2\sum_j \varphi_j'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' - \sum_j \varphi_j\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'' +$$

$$+\sum_j (r_j+\lambda)\left(\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= -\sum_j \varphi_j''\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) - 2\sum_j \varphi_j'\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' +$$

$$+\sum_j \varphi_j\left(-\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'' + (r_j+\lambda)\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)\right) =$$

$$= B_\lambda f + \left(\sum_j \varphi_j\chi_{\Delta_j}\right) f = (B_\lambda + E)f.$$

Сонымен

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f) = (B_\lambda + E)f \qquad (2.3.10)$$

Мұндағы E - бірлік оператор. Әртүрлі j-лер үшін Ω_j интервалдарының ең көп дегенде екеуі ғана өзара қиылысатынын байқаймыз. Сондықтан келесі теңсіздіктер орынды:

$$\|B_\lambda f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} |B_\lambda f|^2 dx \le$$

$$\le \sum_j \int_{\Delta_j} \left[\sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\varphi_k'' \theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f) + 2\varphi_k' \left(\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f) \right)' \right) \right]^2 dx \le$$

$$\le 3 \sum_j \int_{\Delta_j} \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(|\varphi_k''| \left|\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right| + 2|\varphi_k'| \left| \left(\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f) \right)' \right| \right)^2 dx =$$

$$= 3 \sum_j \int_{\Delta_j} \left(\left(|\varphi_{j-1}''| \left| \theta_{j-1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j-1}} f \right) \right| + 2|\varphi_{j-1}'| \left| \left(\theta_{j-1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j-1}} f \right) \right)' \right| \right)^2 + \right.$$

$$+ \left(|\varphi_j''| \left| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right| + 2|\varphi_j'| \left| \left(\theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right)' \right| \right)^2 +$$

$$\left. + \left(|\varphi_{j+1}''| \left| \theta_{j+1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j+1}} f \right) \right| + 2|\varphi_{j+1}'| \left| \left(\theta_{j+1,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_{j+1}} f \right) \right)' \right| \right)^2 \right) dx =$$

$$3 \sum_j \int_{\Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}} \left(|\varphi_j''| \left| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right| + 2|\varphi_j'| \left| \left(\theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right)' \right| \right)^2 dx \le$$

$$\le 3M^2 \sum_j \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right| + 2 \left| \left(\theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right)' \right| \right)^2 dx \le$$

$$\le 3M^2 \sum_j \int_{\mathbb{R}} 2 \left| \theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right|^2 + 2 \left(2 \left| \left(\theta_{j,\lambda}^{-1} \left(\chi_{\Delta_j} f \right) \right)' \right| \right)^2 dx =$$

$$= 6M^2\left(\sum_j \left\|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right\|_2^2 + \sum_j \left\|2\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'\right\|_2^2\right).$$

Сонымен

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 6M^2\left(\sum_j \left\|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right\|_2^2 + \sum_j \left\|2\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'\right\|_2^2\right). \quad (2.3.11)$$

(2.3.8) және (2.3.9) теңсіздіктерінен

$$\left\|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right\|_2 \le \frac{2}{\delta+2\lambda}\left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}), \quad (2.3.12)$$

$$\left\|\left(\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'\right\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}). \quad (2.3.13)$$

Онда (2.3.11) - ден

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\sum_j \left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2^2 =$$

$$= 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\sum_j \int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{\Delta_j}f(x)\right|^2 dx =$$

$$= 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_j \left(\chi_{\Delta_j}\right)^2\right] f^2(x)dx =$$

$$= 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx = 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\|f\|_2^2.$$

Немесе

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 6M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\delta+2\lambda}\right)\|f\|_2^2. \quad (2.3.14)$$

$\lambda \ge \lambda_0 = \frac{24M^2+\sqrt{(24M^2)^2+24M^2\theta}}{2\theta} - \frac{\delta}{2}$ деп белгілейік. (2.3.14) бойынша, әрбір $\lambda \ge \lambda_0$ үшін

$$\|B_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le \theta \;\; (0 < \theta < 1) \tag{2.3.15}$$

теңсіздігі орындалады, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$ – операторлық норма. Онда, белгілі Банах теоремасы бойынша, әрбір $\lambda \ge \lambda_0$ үшін $E + B_\lambda$ операторы қайтымды, оған кері $(E + B_\lambda)^{-1}$ операторы шенелген және келесі теңсіздіктер орынды:

$$\frac{1}{1+\theta} \le \|(E + B_\lambda)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le \frac{1}{1-\theta}(\lambda \ge \lambda_0). \tag{2.3.16}$$

Шынында да, $\lambda \ge \lambda_0$ болғанда, (2.3.15) теңсіздігі бойынша,

$$1 - \theta \le \left| \|E\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} - \|B_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \right| \le \|(E + B_\lambda)\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.$$

Сондықтан

$$\|(E + B_\lambda)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} = \|(E + B_\lambda)\|^{-1}_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le \frac{1}{1-\theta}. \tag{2.3.17}$$

Екінші жағынан

$$\|(E + B_\lambda)\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le \|E\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} + \|B_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le 1 + \theta.$$

болғандықтан,

$$\|(E + B_\lambda)\|^{-1}_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} = \|(E + B_\lambda)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \ge \frac{1}{1+\theta}. \tag{2.3.18}$$

(2.3.17) және (2.3.18) теңсіздіктерінен (2.3.16) шығады.
(2.3.16) – ны ескерсек, (2.3.10) теңдігінен алатынымыз

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda(E + B_\lambda)^{-1}, \lambda \ge \lambda_0. \tag{2.3.19}$$

Енді $\left\|(r + \lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\|$ нормасын бағалайық. (2.3.16) және (2.3.19) бойынша

$$\left\|(r + \lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\theta}\|(r + \lambda)M_\lambda\|, \qquad \lambda \ge \lambda_0.$$

Ал

$$\|(r + \lambda)M_\lambda f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} (r(x) + \lambda)^2 \left| \sum_{k=j-1}^{j+1} \varphi_k(x)\theta_{k,\lambda}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f) \right|^2 dx \le$$

$$\leq 3\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta_j}(r(x)+\lambda)^2\left(\left|\varphi_{j-1}\theta_{j-1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-1}}f\right)\right|^2+\left|\varphi_j\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|\varphi_{j+1}\theta_{j+1,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+1}}f\right)\right|^2\right)dx\leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Delta_j}r(x)+\lambda\right)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j\cup\Delta_{j+1}}\left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx\leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda\right)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx.$$

(2.3.7) теңсіздігі және $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегінің b) қасиеті бойынша,

$$3\left(\sup_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda\right)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_j(x)\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx\leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda\right)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\theta_{j,\lambda}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx\leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda\right)^2\frac{1}{\left(\inf_{x\in\mathbb{R}}r_j(x)+\lambda\right)^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx\leq$$

$$\leq 3\left(\sup_{x\in\Omega_j}\ r(x)+\lambda\right)^2\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\inf_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda\right)^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2dx\leq$$

$$\leq 12\left(\frac{\sup_{x\in\Omega_j}r(x)+\lambda}{\inf_{t\in\Omega_j}r(t)+\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\chi_{\Delta_j}^2\right)f^2(x)dx\leq$$

$$\leq 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{r(x)}{r(t)}+\frac{\lambda}{\delta}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\chi_{\Delta_j}^2\right)f^2(x)dx=$$

$$= 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{r(x)}{r(t)}+\frac{\lambda}{\delta}\right)^2\|f\|_2^2, \quad \sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{r(x)}{r(t)}\le K^2.$$

Сонымен

$$\|(r+\lambda)M_\lambda f\|_2^2 \le 12(K^2+\frac{\lambda}{\delta})^2\|f\|_2^2(\lambda\ge\lambda_0). \qquad (2.3.20)$$

Әрбір $z\in D(\mathcal{L}_\lambda)$, $\mathcal{L}_\lambda z=f$, элементі үшін $z=\mathcal{L}_\lambda^{-1}f$ $(\lambda\ge\lambda_0)$. Онда, (2.3.19) бойынша,

$$\|(r+\lambda)z\|_2=\left\|(r+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}f\right\|_2=\|(r+\lambda)M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1}f\|_2$$

екенін аламыз. $(E+B_\lambda)^{-1}f=g$ деп белгілейік. Сонда

$$\|(r+\lambda)z\|_2=\|(r+\lambda)M_\lambda g\|_2\le 2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\|g\|_2=$$

$$=2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\|(E+B_\lambda)^{-1}f\|_2\le 2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\|(E+B_\lambda)^{-1}\|\|f\|_2\le$$

$$\le 2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2. \qquad (2.3.21)$$

$\lambda>0$ және $r>0$ болғандықтан

$$\|\lambda z\|_2\le 2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2 \qquad (2.3.22)$$

және

$$\|rz\|_2\le 2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}\|f\|_2. \qquad (2.3.23)$$

Онда (2.2.4) бойынша,

$$\|z''\|_2=\|(r+\lambda)z-\mathcal{L}_\lambda z\|_2\le\|(r+\lambda)z\|_2+\|\mathcal{L}_\lambda z\|_2\le$$

$$\le (2\sqrt{3}\left(K^2+\frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}+1)\|f\|_2. \qquad (2.3.24)$$

(2.3.22), (2.3.23) және (2.3.24) теңсіздіктерінен әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)$ үшін алатынымыз

$$\|z''\|_2 + \|rz\|_2 + \|\lambda z\|_2 \le (6\sqrt{3}\left(K^2 + \frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}+1)\|f\|_2. \qquad (2.3.25)$$

Осыдан, Анықтама 2.3.1 бойынша, лемманың дәлелдеуі шығады. Лемма дәлелденді.

(2.1.4) - тен $y^{(2)} = z$ екенін ескеріп, (2.2.1) теңдеуінің y шешімі үшін келесідей баға аламыз

$$\|y^{(4)}\|_2 + \|ry^{(2)}\|_2 + \|\lambda y^{(2)}\|_2 \le (6\sqrt{3}\left(K^2 + \frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta}+1)\|f\|_2. \quad (2.3.26)$$

Ескерту 2.3.1. Лемма 2.3.1-де $r(x) \ge \delta$ шартын $r(x) \ge 1$ теңсіздігімен алмастыруға болады. Шынында да, егер $r(x) \ge \delta = \frac{1}{\varepsilon^2}$ орындалса, онда $\frac{1}{\varepsilon^2} \le r(x)$. $x = \varepsilon t$ $(t > 0)$ алмастыруын жасап, $y(x) = y(\varepsilon t) = \hat{y}(t)$ және $r(x) = \hat{r}(t)$ деп белгілейік. Сонда $l\mathrm{y} = \mathrm{y}^{(4)} + r(x)y^{(2)}$ операторы мына түрге көшеді

$$\hat{l}\hat{y}(t) = -\hat{y}^{(4)}(t) + \varepsilon^2\hat{r}(t)\hat{y}^{(2)}(t),$$

мұндағы $\varepsilon^2\hat{r}(t) \ge \varepsilon^2\frac{1}{\varepsilon^2} = 1.$

Теорема 2.3.1. Айталық $r(x) \ge 1$ функциясы үшін $\gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty$ шарты орындалсын. Онда әрбір $f \in L_2(\mathbb{R})$ үшін (2.1.1) теңдеуінің y шешімі табылады және ол жалғыз. Ал егер сонымен қатар (2.3.2) қатысы орындалса, онда y шешімі

$$\|y^{(4)}\|_2 + \|ry^{(2)}\|_2 + \|y\|_2 \le C\|f\|_2 \qquad (2.3.27)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Дәлелдеу. $\gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty$ шарты мен Лемма 2.1.1 бойынша, әрбір $y \in D(l)$ үшін мына теңсіздіктер орынды

$$\|y\|_2 \le 2\gamma_{1,\sqrt{r},2}\|\sqrt{r}y^{(2)}\|_2 \le 2\gamma_{1,\sqrt{r},2}\|f\|_2. \qquad (2.3.28)$$

(2.3.28) және (2.3.26) теңсіздіктерінен

$$\|y^{(4)}\|_2 + \|ry^{(2)}\|_2 + \|y\|_2 \le (6\sqrt{3}\left(K^2 + \frac{\lambda}{\delta}\right)\frac{1}{1-\theta} + 2\gamma_{1,\sqrt{r},2}+1)\|f\|_2$$

бағасын аламыз. Теорема дәлелденді.

Мысал 2.3.1. Келесі

$$-y^{(4)}+(2x^4+15)^2y''=f(x) \tag{2.3.29}$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in L_2(\mathbb{R})$. (2.3.29) теңдеуінің айнымалы $(2x^4+15)^2$ коэффициенті Теорема 2.3.1 шарттарын қанағаттандырады. Шынында да, $(2x^4+15)^2$ функциясы – жұп болғандықтан

$$\gamma_{1,(2x^4+15),2}=\max\left(\sup_{x>0}\left(\int_0^x dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^\infty t^2(2t^4+15)^{-2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\sup_{x<0}\left(\int_x^0 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^x s^2(2s^4+15)^{-2}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le$$

$$\max\left(\sup_{x>0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^4+15}}\left(\int_x^\infty\frac{t^2}{2t^4+15}dt\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\sup_{x<0}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{2x^4+15}}\left(\int_{-\infty}^x\frac{s^2}{2s^4+15}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)<\infty.$$

Енді

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(2x^4+15)^2}{(2\eta^4+15)^2}<\infty$$

орындалатынын көрсетейік.

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(2x^4+15)^2}{(2\eta^4+15)^2}\le\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(2(1+|\eta|)^4+15)^2}{(2\eta^4+15)^2}\le$$

$$\le\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{(16(1+\eta^4)+15)^2}{(2\eta^4+15)^2}\le$$

$$\le\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\le 1}\frac{\left(8(2\eta^4+15)\right)^2}{(2\eta^4+15)^2}=64.$$

Сонымен, Теорема 2.3.1 – дің шарттары орындалады екен. Демек, (2.3.15) теңдеуінің жалғыз ғана $y(x)$ шешімі бар және ол үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\left\|y^{(4)}\right\|_2 + \left\|(2x^4 + 15)^2 y^{(2)}\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|f\|_2.$$

3 БІРІНШІ РЕТТІ КОЭФФИЦИЕНТІ НӨЛДЕН ЕРЕКШЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІЛУ ЖӘНЕ КОЭРЦИТИВТІЛІК ШАРТТАРЫ

3.1 Бір нұқсанды дифференциалдық оператордың қасиеттері туралы

$$l_0 y = y^{(4)} + s(x)y' = f(x), \tag{3.1.1}$$

теңдеуінің шешілу шарттары оны құрайтын дифференциалдық операторға тікелей байланысты. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$- төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған $l_0 y = y^{(4)} + s(x)y'$ операторын қарастырайық.

$$s(x) \geq \delta > 0 \tag{3.1.2}$$

үзіліссіз дифференциалданатын функция болсын. $l_0 -$ дің $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік.

*Лемма 3.1.1.*Айталық $s(x)$ функциясы (3.1.2) шартын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{s}y'\right\|_2 \leq \left\|\frac{l_0 y}{\sqrt{s}}\right\|_2. \tag{3.1.3}$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. Онда $A = (l_0 y, y')$ скаляр көбейтіндісі анықталған. Келесі түрлендірулерді жасайық

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} y^{(4)} y' \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} s(x)[y']^2 \, dx =$$

$$= y^{(3)} y' \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} y^{(3)} \, y^{(2)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} s(x)[y']^2 \, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} y^{(2)} \, dy^{(2)} + \int_{-\infty}^{\infty} s(x)[y']^2 \, dx = -\frac{\left[y^{(2)}\right]^2}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} s(x)[y']^2 \, dx.$$

Сонымен

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)[y']^2 \, dx. \tag{3.1.4}$$

Екінші жағынан

$$A \leq \int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|\, |y'| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y| \frac{1}{\sqrt{s(x)}} \sqrt{s(x)} |y'| dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{s(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(x) |y'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.5)$$

(3.1.4) және (3.1.5) теңсіздіктерінен

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(x) |y'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|^2 \frac{1}{s(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Осыдан (3.1.3) шығады. (3.1.2) шарты орындалғанда, (3.1.3)-тің оң жағы шенелген. Лемма дәлелденді.

Лемма 3.1.2. Айталық $s(x)$ функциясы (3.1.2) және $\gamma_{1,\sqrt{s},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда l операторы қайтымды және әрбір $y \in D(l)$ үшін

$$\left\| \sqrt{s} y' \right\|_2 + \|y\|_2 \leq C \|l y\|_2 \qquad (3.1.6)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(1)}(\mathbb{R})$ болсын. $\gamma_{1,\sqrt{s},1} < \infty$ шарты, (3.1.3) бағасы және Лемма 1.1.2 бойынша, мына теңсіздіктер орынды

$$\|y\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{s},1} \left\| \sqrt{s} y' \right\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{s},1} \left\| \frac{l_0 y}{\sqrt{s}} \right\|_2.$$

Осыдан және (3.1.2) қатысынан

$$\left\| \sqrt{s} y' \right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y\|_2 \qquad (3.1.7)$$

және

$$\|y\|_2 \leq \frac{2\gamma_{1,\sqrt{s},2}}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y\|_2. \qquad (3.1.8)$$

(3.1.7), (3.1.8) бағалары әрбір $y \in D(l)$ үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. Онда l операторы l_0 -дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \ \ \|l_0 y_n - ly\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \ \|l_0 y_n\|_2 \to \|ly\|_2 (n \to \infty). \tag{3.1.9}$$

(3.1.8) және (3.1.7) бойынша

$$\|y_n\|_2 \le \frac{2\gamma_{1,\sqrt{s},1}}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y_n\|_2 \tag{3.1.10}$$

және

$$\left\|\sqrt{s} y_n'\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|l_0 y_n\|_2. \tag{3.1.11}$$

Екіншіден (3.1.8), (3.1.7) және (3.1.9) бойынша, әрбір n, m номерлері үшін

$$\left\|\sqrt{s} y_n' - \sqrt{s} y_m'\right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \le C \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2. \tag{3.1.12}$$

$y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$. Алуымыз бойынша, $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 = 0$. (3.1.12)-ден $\left\{\sqrt{s} y_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n \to \infty} \left\|\sqrt{s} y_n' - \sqrt{s} y'\right\|_2 = 0,$$

онда

$$\lim_{n \to \infty} \left\|\sqrt{s} y_n'\right\|_2 = \left\|\sqrt{s} y'\right\|_2.$$

(3.1.9) қатысын ескеріп, (3.1.10) мен (3.1.11) теңсіздіктерінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз, сәйкесінше

$$\|y\|_2 \le \frac{2\gamma_{1,\sqrt{s},1}}{\sqrt{\delta}} \|ly\|_2 \tag{3.1.13}$$

және

$$\left\|\sqrt{s} y'\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|ly\|_2. \tag{3.1.14}$$

(3.1.13) - пен (3.1.14) - теңсіздіктерін мүшелей қосып, (3.1.6) - ны аламыз. Лемма дәлелденді.

3.2 Екімүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету

Бұл ішкі бөлімде біз нұқсанды

$$y^{(4)} + s(x)y' = f(x), \tag{3.2.1}$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырып, оның шешілімділік мәселесі үшінші ретті және потенциалы тұрақты таңбалы бір дифференциалдық теңдеуінің қасиеттеріне байланысты екенін көрсетеміз. (3.2.1) - де алдыңғы бөлімшедегідей $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $s(x) > 0$ үзіліссіз дифференциалданады, ал $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. Және $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған $l_0 y = y^{(4)} + s(x)y'$ операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. $ly = f$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін (3.2.1) теңдеуінің шешімі деп атаймыз. Келесі тұжырым осы анықтама мен Лемма 3.1.2 – ге сүйеніп дәлелденеді.

Лемма 3.2.1. Айталық $s(x)$ коэффициенті Лемма 3.1.2 шарттарын қанағаттандырсын. Онда (3.2.1) теңдеуінің шешімі y жалғыз ғана.

Дәлелдеу. Қарсы жориық. Айталық y пен z (3.1.1) теңдеуінің әртүрлі екі шешімі болсын. Онда, $y, z \in D(l)$, $y \neq z$, $ly = f$ және $lz = f$. $v = y - z$ болсын. Онда $v \in D(l)$ және $lv = 0$. (3.1.6) бағасы бойынша, $\|v\|_2 = 0$. Олай болса, $y = z$. Лемма дәлелденді.

Айталық Лемма 3.1.2 шарттары орындалсын. (3.1.6) бағасы әрбір $y \in D(l)$ үшін $\sqrt{s}y' \in L_2(\mathbb{R})$ қатысын береді. (3.1.2) шарты бойынша, келесі бағалау орынды:

$$\|y'\|_2 \leq \left\|\sqrt{s}y'\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|ly\|_2. \tag{3.2.2}$$

Демек $y' \in L_2(\mathbb{R})$. Егер $y' = z$ және $\mathcal{L}_0 z = z''' + s(x)z$ деп белгілесек, онда (3.2.1) - ден

$$\mathcal{L}_0 z = z''' + s(x)z = f(x) \tag{3.2.3}$$

теңдеуіне келеміз.

$\mathcal{L}_0 v = v''' + s(x)v$, $D(\mathcal{L}_0) = C_0^{(3)}(\mathbb{R})$, дифференциалдық операторын алып, оның $L_2(\mathbb{R})$ - дегі тұйықталуын $\mathcal{L}$ түрінде белгілейміз. (3.2.3) теңдеуінің шешімі деп $\mathcal{L}z = f$ орындалатын $z \in D(\mathcal{L})$ функциясын айтамыз.

Егер (3.2.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (3.2.3) теңдеуінің де шешімі бар. Шынында да, айталық y - (3.2.1) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$

қатыстары орындалады. (3.1.7) және (3.1.8) бойынша, y_n үшін $\|y_n\|_2 + \|y_n'\|_2 \leq C\|l_0 y_n\|_2$ $(n = 1,2,\dots,)$ теңсіздігі орынды. Сондықтан $v \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\|y_n' - v\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатысы орындалады. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан $v = y'$. Демек, егер $y_n' = z_n$ деп белгілесек, онда $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(3)}(\mathbb{R})$ және $\|z_n - v\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Бұл v функциясы (3.2.3) теңдеуінің шешімі болатынын дәлелдейді.

Сонымен, егер (3.2.1) теңдеуінің шешімі бар болса, онда, (3.2.3) теңдеуінің де шешімі бар. Енді келесі лемманы дәлелдейік.

Лемма 3.2.2. Айталық $s(x)$ Лемма 3.1.2 шарттарын қанағаттандырсын және (3.2.3) теңдеуінің шешімі бар болсын. Онда (3.2.1) теңдеуінің де шешімі бар.

Дәлелдеу. Айталық $z \in L_2(\mathbb{R})$ (3.2.3) теңдеуінің шешімі болсын. Онда, анықтама бойынша, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(3)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $\|z_n - z\|_2 \to 0$, $\|\mathcal{L}_0 z_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатыстары орындалады. $(\mathcal{L}z_n, z_n)$ функционалын Лемма 3.1.1 әдісін қайталай отырып, түрлендіріп,

$$\left\|\sqrt{s} z_n\right\|_2 \leq \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$$

екенін көреміз. Айталық $y_n(x)$ келесі $y_n' = z_n$ орындалатын функция болсын. Онда $\left\|\sqrt{s} y_n'\right\|_2 \leq \|\mathcal{L}_0 z_n\|_2$, осыдан және $\gamma_{1,\sqrt{s},1} < \infty$ шартынан, Лемма 1.1.2 бойынша,

$$\|y_n\|_2 \leq 2\gamma_{1,\sqrt{s},1}\left\|\sqrt{s} y_n'\right\|_2 \leq C_1\|\mathcal{L}_0 z_n\|_2, \ z_n \in C_0^{(3)}(\mathbb{R}).$$

Олай болса $y_n \in L_2(\mathbb{R})$. Осы және $y_n' \in L_2(\mathbb{R})$ қатыстары бойынша, $y_n(x) \in W_2^1(\mathbb{R})$. Соболев кеңістіктері үшін енгізу теоремаларынан y_n – үзіліссіз және $\lim\limits_{|x|\to\infty} y_n(x) = 0$. Ал $y_n' \in C_0^{(3)}(\mathbb{R})$ қатысынан $a > 0$ саны табылып, барлық $|x| > a$ үшін $y_n(x) = 0$ теңдігі орындалатыны шығады. Сондықтан $y_n(x) \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}) = D(l_0)$. Жоғарыдағы теңсіздік бойынша, $\bar{y} \in L_2(\mathbb{R})$ элементі табылып, $\|y_n - \bar{y}\|_2 \to 0$, $\|l_0 y_n - f\|_2 \to 0$ ($n \to \infty$) орындалады. Демек, $\bar{y}$ - (3.2.1) теңдеуінің шешімі. Лемма дәлелденді.

Енді (3.2.3) теңдеуінің шешілімділік шарттарын іздестірейік. Айталық $s(x)$ функциясы

$$\sup_{x,\eta\in\mathbb{R},|x-\eta|\leq 1} \frac{s(x)}{s(\eta)} < \infty \tag{3.2.4}$$

шартын қанағаттандырсын.

$\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ және $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ интервалдар тізбектерін және $\varphi_j(x) \in C_0^{\infty}(\Omega_j)$ функцияларының $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегін келесідей етіп алайық:

a) $\Delta_j = [j, j+1),\ \Omega_{\mathrm{j}} = \left(j-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}\right) (j \in \mathbb{Z})$,

$b)\ 0 \le \varphi_j \le 1,\ \ \varphi_j(x) = 1\ \forall x \in \Delta_j (j \in \mathbb{Z})$,

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \max_{x\in\Omega_{\mathrm{j}}} \left(\left|\varphi_j{}'(x)\right|, \left|\varphi_j{}''(x)\right|, \left|\varphi_j^{(3)}\right|\right) \le M.$$

Онда

$$\left|\Omega_{\mathrm{j}}\right| = 2, \qquad \bar{\Delta}_j \subset \Omega_{\mathrm{j}} \subset \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}, \qquad \Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset\ \ (j \ne k),$$
$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_j = \mathbb{R},$$

$$\Omega_{\mathrm{j}} \cap \Omega_{\mathrm{m}} = \emptyset\ \ (|j-m| \ge 2), \qquad \sum_j \varphi_j(x)\chi_{\Delta_j}(x) = 1.$$

Мұндағы χ_{Δ_j} - Δ_j интервалының сипаттамалық функциясы. $b)$ қатыстарын қанағаттандыратын $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегі әрқашан табылатынын еске саламыз.

Берілген $s(x)$ - тің интервал $\Omega_{\mathrm{j}}\ (j \in \mathbb{Z})$ - ден барлық $\mathbb{R}$ -ге былайша жалғастырайық: бұл жалғастыруды $s_j(x) (j \in \mathbb{Z})$ деп белгілейік, ол үзіліссіз дифференциалданатын және

$$\frac{1}{2} \inf_{z\in\Omega_{\mathrm{j}}} s(z) \le s_j(x) \le 2 \sup_{z\in\Omega_{\mathrm{j}}} s(z), x \in \mathbb{R}, \tag{3.2.5}$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын функция болсын. (3.2.4) шарты бойынша, мұндай $s_j(x)$ функциялары табылады. $\theta_{\lambda j}$ деп

$$\theta_{0\lambda j} z = z'''(x) + [s_j(x) + \lambda] z(x),\ D(\theta_{0\lambda j}) = C_0^{(3)}(\mathbb{R}),\ \lambda \ge 0, \tag{3.2.6}$$

дифференциалдық операторының $L_2(\mathbb{R})$ - дегі тұйықталуын белгілейік. Егер $s(x) \ge \delta > 0$ шарты орындалсын деп ұйғарсақ, онда

$$s_j(x) \ge \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.2.7}$$

Екіншіден, $s_j(x)$ шенелген функция болғандықтан, (3.2.6) бойынша, $D(\theta_{\lambda j}) = W_2^3(\mathbb{R})$. Соболев кеңістіктері үшін енгізу теоремаларынан $z \in D(\theta_{\lambda j})$ элементі үшін $z \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ және

$$z(-\infty) = z(+\infty) = z^{(k)}(-\infty) = z^{(k)}(+\infty) = 0 \quad (k = 1,2)$$

қатыстары орындалады. $(\theta_{\lambda j}z, z)(z \in D(\theta_{\lambda j}))$ скаляр көбейтіндісін түрлендіре отырып, (3.2.7) бойынша, келесі

$$\|z\|_2 \leq \frac{2}{\delta + 2\lambda}\|\theta_{\lambda j}z\|_2$$

бағасына келеміз. Осыдан $\theta_{\lambda j}$ қайтымды оператор болатыны шығады. Және $\theta_{\lambda j}$ тұйық оператор екенін ескерсек, $R(\theta_{\lambda j})$ - тұйық жиын болып шығады.

Лемма 3.2.3. Егер $s(x)$ функциясы үзіліссіз болып, $s(x) \geq \delta > 0$ шартын қанағаттандырса, онда $\theta_{\lambda j}(\lambda \geq 0)$ операторы қайтымды және $R(\theta_{\lambda j}) = L_2(\mathbb{R})$.

Дәлелдеу. $\theta_{\lambda j}$ қайтымды оператор екені жоғарыда көрсетілді. $R(\theta_{\lambda j}) = L_2(\mathbb{R})$ теңдігі орындалатынын дәлелдейік. Қарсы жориық. $R(\theta_{\lambda j}) \neq L_2(\mathbb{R})$ болсын. Онда нөлдік емес $w \in L_2(\mathbb{R})\backslash R(\theta_{\lambda j})$, $w \neq 0$, элементі табылады. Жалпылыққа нұқсан келтірмей, w функциясы $R(\theta_{\lambda j})$ жиынына ортогональ деп ұйғарамыз, демек әрбір $g \in R(\theta_{\lambda j})$ үшін $(w, g) = 0$. Онда әрбір $z \in D(\theta_{\lambda j})$ үшін $(w, \theta_{\lambda j}z) = 0$. ${\theta_{\lambda j}}^*$ деп $\theta_{\lambda j}$-ге түйіндес операторды белгілесек,

$$(w, \theta_{\lambda j}z) = ({\theta_{\lambda j}}^* w, z) = 0, \qquad w \in D({\theta_{\lambda j}}^*), \qquad z \in D(\theta_{\lambda j})$$

$D(\theta_{\lambda j})$ жиыны $L_2(\mathbb{R})$-де тығыз, демек

$${\theta_{\lambda j}}^* w = -w''' + (s_j(x) + \lambda)w = 0.$$

$s_j(x)$- шенелген функция, ал $w \in L_2(\mathbb{R})$ болғандықтан $(s_j(x) + \lambda)w \in L_2(\mathbb{R})$. Онда соңғы теңдеуден, $w''' \in L_2(\mathbb{R})$, ал (3.1.2) шарты бойынша, $w \in W_2^3(\mathbb{R})$. Сондықтан, Соболев кеңістіктері үшін енгізу теоремалары бойынша, $w \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ және

$$w(-\infty) = w(+\infty) = w^{(k)}(-\infty) = w^{(k)}(+\infty) = 0 \quad (k = 1,2). \qquad (3.2.8)$$

$({\theta_{\lambda j}}^* w, w)$ өрнегін бөліктеп интегралдау арқылы, (3.2.7) және (3.2.8) теңдіктерін ескере отырып түрлендірсек,

$$\frac{1}{2}\delta\|w\|_2^2 \leq ({\theta_{\lambda j}}^* w, w). \qquad (3.2.9)$$

Екінші жағынан

$$\left(\theta_{\lambda j}{}^{*}w, w\right) \le \left\|\theta_{\lambda j}{}^{*}w\right\|_2 \|w\|_2. \tag{3.2.10}$$

(3.2.9) және (3.2.10) – нан

$$\frac{1}{2}\delta\|w\|_2 \le \left\|\theta_{\lambda j}{}^{*}w\right\|_2, \tag{3.2.11}$$

ал (3.2.11) және $w \in Ker\theta_{\lambda j}{}^{*}$ қатыстары бойынша, $w = 0$. Қайшылық алынды, ол $R(\theta_{\lambda j}) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетеді. Лемма дәлелденді.

Сонымен, (3.1.2) шарты орындалғанда, $\theta_{\lambda j}^{-1}$ кері операторы бар және үзіліссіз.

Лемма 3.1.6. Егер $s(x) \ge \delta > 0$ шарты орындалса, онда әрбір $z \in D\left(\theta_{\lambda j}\right)$ үшін

$$\|z\|_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} s_j(x) + \lambda}\left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2 (j \in \mathbb{Z}) \tag{3.2.12}$$

бағасы орынды.

Дәлелдеу. Жоғарыдағы (3.1.3) теңсіздігін дәлелдеу әдісіне ұқсас жолмен келесі бағаны аламыз

$$\left\|\sqrt{s_j + \lambda} z\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{s_j + \lambda}}\theta_{\lambda j} z\right\|_2, \quad z \in D\left(\theta_{\lambda j}\right). \tag{3.2.13}$$

Шынында да, әрбір $z \in D\left(\theta_{0\lambda j}\right)$ үшін

$$\left(\theta_{0\lambda j} z, z\right) = \int_{\mathbb{R}} z(x) z^{(3)}(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} [s_j(x) + \lambda] z^2(x)\, dx =$$

$$= z(x)z''(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} z'(x)z''(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} [s_j(x) + \lambda] z^2(x)\, dx =$$

$$= -\frac{(z'(x))^2}{2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} [s_j(x) + \lambda] z^2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} [s_j(x) + \lambda] z^2(x)\, dx. \tag{3.2.14}$$

Екінші жағынан

$$\left(\theta_{0\lambda j} z, z\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\theta_{0\lambda j} z\right|}{\sqrt{s_j(x) + \lambda}} \sqrt{s_j(x) + \lambda} |z|\, dx \le$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\theta_{0\lambda j} z\right|^2}{s_j(x)+\lambda} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [s_j(x)+\lambda]|z|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.2.15)$$

(3.2.15) пен (3.2.14)-тен, әрбір $z \in D(\theta_{\lambda j})$ үшін де орынды (3.2.13) теңсіздігін аламыз. Онда

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{s_j(x)+\lambda}\, \|z\|_2 \leq \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{s_j(x)+\lambda}} \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2.$$

Осыдан (3.2.12) шығады. Лемма дәлелденді.

3.3 Шешімнің максималды регулярлы болу шарттары

Келесі

$$\mathcal{L}_{0\lambda} z = z''' + (s+\lambda) z\,, \qquad D(\mathcal{L}_{0\lambda}) = C_0^{(3)}(\mathbb{R}), \qquad (3.3.1)$$

операторын қарастырамыз. Мұндағы $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. $\mathcal{L}_{0\lambda}$-ның $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуын $\mathcal{L}_\lambda$ деп белгілейік. Айталық, s коэффициенті Лемма 3.1.2 және (3.2.4) шарттарын қанағаттандырсын. Онда $s+\lambda$ $(\lambda \geq 0)$ үшін де сол шарттар орындалады, сондықтан $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ $(\lambda \geq 0)$ кері операторы табылады. Келесі тұжырым орынды.

Теорема 3.3.1. Айталық s коэффициенті

$$s(x) \geq \delta > 0, \qquad \sup_{x,\eta\in\mathbb{R}, |x-\eta|\leq 1} \frac{s(x)}{s(\eta)} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын және $\lambda \geq 0$ болсын. Онда $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ кері операторы үзіліссіз, сонымен бірге, ол $L_2(\mathbb{R})$ - де бөліктенеді, яғни әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)$ үшін келесі

$$\|z'''\|_2 + \|sz\|_2 + \lambda\|z\|_2 \leq C\|\mathcal{L}_\lambda z\|_2 \qquad (3.3.2)$$

бағасы орындалады.

Дәлелдеу. $z \in D(\theta_{\lambda j})$ үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|z'''\|_2 \leq \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2 + \left\|(s_j+\lambda) z\right\|_2 \leq \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2 + \left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x) + \lambda\right) \|z\|_2 \leq$$

$$\leq \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2 + \left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x) + \lambda\right) \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}} \left(s_j(x)+\lambda\right)} \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2.$$

Осыдан

$$\|z'''\|_2 \le \left(1+\frac{\sup\limits_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(s_j(x)+\lambda\right)}\right)\left\|\theta_{\lambda j}z\right\|_2 \le \left(1+\frac{\sup\limits_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda}{\frac{1}{2}\inf\limits_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda}\right)\left\|\theta_{\lambda j}z\right\|_2 \le$$

$$\le \left(1+2\frac{\sup\limits_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda}{\inf\limits_{t\in\Omega_j} s(t)+\lambda}\right)\left\|\theta_{\lambda j}z\right\|_2 \le \left(3+2\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{s(x)}{s(t)}\right)\left\|\theta_{\lambda j}z\right\|_2.$$

(3.2.4) бойынша,

$$\|z'''\|_2 \le (3+2K^2)\left\|\theta_{\lambda j}z\right\|_2. \qquad (3.3.3)$$

Әрбір $z \in D\left(\theta_{0\lambda j}\right)$ үшін келесі теңсіздік орынды

$$\|z'\|_2^2 \le \|z\|_2\|z''\|_2. \qquad (3.3.4)$$

Онда

$$\|z''\|_2^2 \le \|z'\|_2\|z'''\|_2 \le \|z'''\|_2\sqrt{\|z\|_2\|z''\|_2},$$

(3.2.13) және (3.3.3) теңсіздіктерінен

$$\|z''\|_2^{\frac{3}{2}} \le (3+2K^2)\left\|\theta_{0\lambda j}z\right\|_2\sqrt{\frac{2}{\delta+2\lambda}\left\|\theta_{0\lambda j}z\right\|_2},$$

осыдан

$$\|z''\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\left\|\theta_{0\lambda j}z\right\|_2. \qquad (3.3.5)$$

(3.3.4) және (3.3.5) теңсіздіктерінен

$$\|z'\|_2 \le \sqrt{\frac{2}{\delta+2\lambda}\left\|\theta_{0\lambda j}z\right\|_2}\sqrt{\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\left\|\theta_{0\lambda j}z\right\|_2},$$

немесе

$$\|z'\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}} (3+2K^2)^{\frac{1}{3}} \left\|\theta_{0\lambda j} z\right\|_2. \qquad (3.3.6)$$

(3.3.5) және (3.3.6) бағаларын тұйықтай отырып, келесі теңсіздіктерге келеміз:

$$\|z''\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} (3+2K^2)^{\frac{2}{3}} \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2, \qquad (3.3.7)$$

$$\|z'\|_2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}} (3+2K^2)^{\frac{1}{3}} \left\|\theta_{\lambda j} z\right\|_2 \left(z \in D(\theta_{\lambda j})\right). \qquad (3.3.8)$$

Айталық $f \in C_0^{(3)}(\mathbb{R})$ болсын. Келесі M_λ және B_λ операторларын енгізейік:

$$M_\lambda f = \sum_j \varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right),$$

$$B_\lambda f = \sum_j \varphi_j^{(3)} \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right) + 3\sum_j \varphi_j'' \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' + 3\sum_j \varphi_j' \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''.$$

f финитті функция болғандықтан, соңғы өрнектердің оң жақтарындағы қосындыларда қосылғыштар саны шекті. $x \in \Omega_j$ үшін $\mathcal{L}_\lambda$ операторының әсері $\theta_{j,\lambda}$ операторының әсерімен бірдей (себебі коэффициенттері беттеседі). Осыны және $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ қатысын ескерсек, онда

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f) = \sum_j \mathcal{L}_\lambda\left(\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) = \sum_j \theta_{\lambda j}\left(\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \left(\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)^{(3)} + \sum_j (s_j+\lambda)\left(\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) =$$

$$= \sum_j \left(\varphi_j' \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) + \varphi_j \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right)^{(2)} + \sum_j (s_j+\lambda)\left(\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)$$

$$= \sum_j \left(\varphi_j'' \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right) + 2\varphi'_j \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)' + \varphi_j \left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right)' +$$

$$+\sum_j (s_j+\lambda)\left(\varphi_j\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)=$$

$$=\sum_j\left(\varphi_j^{(3)}\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)+3\varphi''_j\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'+3\varphi'_j\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)''\right.$$

$$\left.+\varphi_j\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'''\right)+\sum_j (s_j+\lambda)\left(\varphi_j\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)=$$

$$=\sum_j \varphi_j\left[\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'''+(s_j+\lambda)\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)\right]+$$

$$+\sum_j\left(\varphi_j^{(3)}\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)+3\varphi''_j\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'+3\varphi'_j\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)''\right)=$$

$$\sum_j \varphi_j\left(\chi_{\Delta_j}f\right)+B_\lambda f=(B_\lambda+E)f.$$

Қысқаша

$$\mathcal{L}_\lambda(M_\lambda f)=(B_\lambda+E)f. \tag{3.3.9}$$

Мұндағы E - бірлік оператор. Әртүрлі j-лер үшін Ω_j интервалдарының ең көп дегенде екеуі ғана өзара қиылысатынын байқаймыз. Сондықтан келесі теңсіздіктер орынды:

$$\|B_\lambda f\|_2^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta_j}|B_\lambda f|^2dx\le$$

$$\le\sum_j\int_{\Delta_j}\left[\sum_{k=j-1}^{j+1}\left(\varphi_k^{(3)}\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k}f)+3\varphi''_k\left(\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k}f)\right)'\right.\right.$$

$$\left.\left.+3\varphi'_k\left(\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k}f)\right)''\right)\right]^2dx\le$$

$$\leq 3\sum_j \int_{\Delta_j} \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\left|\varphi_k^{(3)}\right| \left|\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right| + 3\left|\varphi''_k\right| \left|\left(\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right)'\right|\right.$$

$$\left. + 3\left|\varphi'_k\right| \left|\left(\theta_{\lambda k}^{-1}(\chi_{\Delta_k} f)\right)''\right|\right)^2 dx =$$

$$= 3\sum_j \int_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j\cup\Delta_{j+1}} \left(\left|\varphi_j^{(3)}\right| \left|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right| + 3\left|\varphi''_j\right| \left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right|\right.$$

$$\left. + 3\left|\varphi'_j\right| \left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right|\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 3M^2 \sum_j \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right| + 3\left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right| + 3\left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right|\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 9M^2 \left(\sum_j \int_{\mathbb{R}} \left|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx + \sum_j \int_{\mathbb{R}} 9\left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right|^2 dx\right.$$

$$\left. + \sum_j \int_{\mathbb{R}} 9\left|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right|^2 dx\right) =$$

$$= 9M^2 \left(\sum_j \left\|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right\|_2^2 + \sum_j \left\|9\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right\|_2^2\right.$$

$$\left. + \sum_j \left\|9\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right\|_2^2\right).$$

Сонымен

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 9M^2 \left(\sum_j \left\|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right\|_2^2 + \sum_j \left\|9\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)'\right\|_2^2 +\right.$$

$$\left. + \sum_j \left\|9\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right)''\right\|_2^2\right) \tag{3.3.10}$$

(3.2.13), (3.3.8) және (3.3.7) теңсіздіктері бойынша,

$$\left\|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right\|_2^2 \le \left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 \left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2^2, \tag{3.3.11}$$

$$\left\|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)'\right\|_2^2 \le \left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2^2, \tag{3.3.12}$$

$$\left\|\left(\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right)''\right\|_2^2 \le \left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2 \left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2^2 (j\in\mathbb{Z}). \tag{3.3.13}$$

Онда (3.3.10)-нан

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 9M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right.$$
$$\left. + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\sum_j \left\|\chi_{\Delta_j}f\right\|_2^2 =$$

$$= 9M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right.$$
$$\left. + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\sum_j \int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{\Delta_j}f(x)\right|^2 dx =$$

$$= 9M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right.$$
$$\left. + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_j \left(\chi_{\Delta_j}\right)^2\right] f^2(x)dx =$$

$$= 9M^2\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^2 + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right.$$
$$\left. + 81\left(\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\|f\|_2^2.$$

Әрі қарай

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 9M^2\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}+9\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}+\right.$$

$$\left.+9\left(\frac{2}{\delta+2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2\|f\|_2^2. \qquad (3.3.14)$$

Егер λ_0 санын

$$9M^2\left(\frac{2}{\delta+2\lambda_0}+9\left(\frac{2}{\delta+2\lambda_0}\right)^{\frac{2}{3}}(3+2K^2)^{\frac{1}{3}}+9\left(\frac{2}{\delta+\lambda_0}\right)^{\frac{1}{3}}(3+2K^2)^{\frac{2}{3}}\right)^2 \le \beta < 1$$

теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алсақ, онда (3.3.14) бойынша, әрбір $\lambda \ge \lambda_0$ үшін

$$\|B_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \le \beta. \qquad (3.3.15)$$

орындалады. Онда, Банах теоремасы бойынша, әрбір $\lambda \ge \lambda_0$ үшін $E+B_\lambda$ операторы қайтымды, оған кері $(E+B_\lambda)^{-1}$ операторы үзіліссіз және келесі теңсіздіктер орынды ($\|A\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$ орнына қысқаша $\|A\|$ деп жазамыз):

$$\frac{1}{1+\beta} \le \|(E+B_\lambda)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\beta}(\lambda \ge \lambda_0). \qquad (3.3.16)$$

Шынында да, $\lambda \ge \lambda_0$ болғанда, (3.3.15) теңсіздігінен

$$1-\beta \le |\|E\| - \|B_\lambda\|| \le \|(E+B_\lambda)\|.$$

Сондықтан

$$\|(E+B_\lambda)^{-1}\| = \|(E+B_\lambda)\|^{-1} \le \frac{1}{1-\beta}. \qquad (3.3.17)$$

Екінші жағынан

$$\|E+B_\lambda\| \le \|E\| + \|B_\lambda\| \le 1+\beta.$$

болғандықтан,

$$\|(E+B_\lambda)\|^{-1} = \|(E+B_\lambda)^{-1}\| \geq \frac{1}{1+\beta}. \qquad (3.3.18)$$

(3.3.17) және (3.3.18) теңсіздіктерінен (3.3.16) шығады.(3.3.16) – ны ескерсек, (3.3.9) теңдігінен алатынымыз

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda (E+B_\lambda)^{-1}, \lambda \geq \lambda_0. \qquad (3.3.19)$$

Осы (3.3.19) теңдігі мен Лемма 3.2.3 – тен $\mathcal{L}_\lambda$ операторы $\lambda \geq \lambda_0$ орындалатын әрбір λ үшін үзіліссіз қайтымды екені шығады. Онда $\lambda \geq 0$–де орынды (3.2.13) бағасы мен оператордың регулярлық өрісі туралы белгілі тұжырым бойынша, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ операторы да үзіліссіз қайтымды.

$\mathcal{L}$ бөліктенетін оператор екенін дәлелдейік. Ол үшін, ең болмағанда бір теріс емес λ саны, мысалы $\lambda \geq \lambda_0$, үшін $\left\|(s+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$ нормасының шенелгендігін көрсету жеткілікті. (3.3.16) және (3.3.19) бойынша,

$$\left\|(s+\lambda)\mathcal{L}_\lambda^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\beta}\|(s+\lambda)M_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}, \qquad \lambda \geq \lambda_0.$$

Егер $f \in L_2(\mathbb{R})$ болса, онда

$$\|(s+\lambda)M_\lambda f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} (s(x)+\lambda)^2 \left| \sum_{k=j-1}^{j+1} \varphi_k(x)\theta_{\lambda k}^{-1}\left(\chi_{\Delta_k} f\right) \right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} (s(x)+\lambda)^2 \left(\left|\varphi_{j-1}\theta_{\lambda\, j-1}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j-1}} f\right)\right|^2 + \left|\varphi_j \theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left|\varphi_{j+1}\theta_{\lambda\, j+1}^{-1}\left(\chi_{\Delta_{j+1}} f\right)\right|^2 \right) dx \leq$$

$$\leq 3 \left(\sup_{x \in \Delta_j} s(x) + \lambda \right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j\cup\Delta_{j+1}} \left|\varphi_j(x)\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq 3 \left(\sup_{x \in \Omega_j} s(x) + \lambda \right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi_j(x)\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j} f\right)\right|^2 dx.$$

(3.2.12) теңсіздігі және $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ тізбегінің b) қасиеті бойынша,

$$3\left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi_j(x)\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda\right)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\theta_{\lambda j}^{-1}\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda\right)^2 \frac{1}{\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} s_j(x)+\lambda\right)^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le 3\left(\sup_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\inf_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda\right)^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\chi_{\Delta_j}f\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le 12\left(\frac{\sup_{x\in\Omega_j} s(x)+\lambda}{\inf_{t\in\Omega_j} s(t)+\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\chi_{\Delta_j}^2\right) f^2(x)dx \le$$

$$\le 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{s(x)}{s(t)}+1\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\chi_{\Delta_j}^2\right) f^2(x)dx =$$

$$= 12\left(\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{s(x)}{s(t)}+1\right)^2 \|f\|_2^2.$$

Осыдан

$$\sup_{x,t\in\Omega_j}\frac{s(x)}{s(t)} = K^2$$

деп белгілесек,

$$\|(s+\lambda)M_\lambda f\|_2^2 \le 12(K^2+1)^2\|f\|_2^2 (\lambda \ge \lambda_0). \qquad (3.3.20)$$

Әрбір $z \in D(\mathcal{L}_\lambda)$, $\mathcal{L}_\lambda z = f$ элементі үшін $z = \mathcal{L}_\lambda^{-1} f$ $(\lambda \ge \lambda_0)$. Онда, (3.3.19) бойынша,

4 ШЕНЕЛМЕГЕН ЖОҒАРҒЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

4.1 Төртінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары

$$(\rho(x)(\rho(x)y')'')' - (r(x)y')' = F(x) \tag{4.1.1}$$

теңдеуін қарастырайық. Осы пунктте $x \in \mathbb{R}$, $r(x) > 0$ үзіліссіз дифференциалданатын, $\rho(x) > 0$ үш рет үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғаратын боламыз. Төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ функциялар жиынында анықталған $l_0 y = (\rho(x)(\rho(x)y')'')' - (r(x)y')'$, $D(l_0) = C_0^{(4)}(\mathbb{R})$, операторын алайық. Оның $L_2(\mathbb{R})$-дегі тұйықталуын l деп белгілейік. (4.1.1) теңдеуінің шешімі деп $ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін айтамыз.

Лемма 4.1.1. Айталық $r(x)$ функциясы

$$r(x) \geq \delta > 0 \tag{4.1.2}$$

және $\gamma_{1,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in D(l)$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|l_0 y\|_2 . \tag{4.1.3}$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. Онда $A = (l_0 y, y)$ скаляр көбейтіндісі анықталған. Келесі түрлендірулерді жасайық

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho(x)(\rho(x)y')'')' y \, dx - \int_{-\infty}^{\infty} (r(x)y')' y \, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)y'(\rho(x)y')'' \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)(y')^2 \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ((\rho(x)y')')^2 \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)(y')^2 \, dx =$$

$$= \|(\rho(x)y')'\|_2^2 + \left\|\sqrt{r}y'\right\|_2^2.$$

Осыдан

$$\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2^2 \leq A. \tag{4.1.4}$$

Екінші жағынан

$$A \le \int_{-\infty}^{\infty} |l_0 y|\, |y| dx \le \|l_0 y\|_2\, \|y\|_2. \qquad (4.1.5)$$

(4.1.4), (4.1.5) және $\gamma_{1,\sqrt{r},1} < \infty$ шартынан [63]

$$\|y\|_2^2 \le C_1 \left\|\sqrt{r} y'\right\|_2^2 \le C_1 \|l_0 y\|_2\, \|y\|_2.$$

Осыдан

$$\|y\|_2 \le C_1 \|l_0 y\|_2. \qquad (4.1.6)$$

(4.1.5) бойынша,

$$\|l_0 y\|_2 \ge \frac{\left\|\sqrt{r} y'\right\|_2}{\|y\|_2} \left\|\sqrt{r} y'\right\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{C_1}} \left\|\sqrt{r} y'\right\|_2$$

немесе

$$\left\|\sqrt{r} y'\right\|_2 \le \sqrt{C_1} \|l_0 y\|_2. \qquad (4.1.7)$$

(4.1.6), (4.1.7) бағалары $D(l)$ – ге тиісті әрбір элемент үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. l операторы l_0-дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \;\; \|l_0 y_n - l y\|_2 \to 0 \; (n \to \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \qquad \|l_0 y_n\|_2 \to \|l y\|_2 (n \to \infty). \qquad (4.1.8)$$

(4.1.6) және (4.1.7) бойынша

$$\|y_n\|_2 \le C_1 \|l_0 y_n\|_2 \qquad (4.1.9)$$

және

$$\left\|\sqrt{r} y_n'\right\|_2 \le \sqrt{C_1} \|l_0 y_n\|_2. \qquad (4.1.10)$$

Екіншіден (4.1.9), (4.1.10) және (4.1.8) бойынша, әрбір n, m номерлері үшін

$$\left\|\sqrt{r}y_n' - \sqrt{r}y_m'\right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \le C\|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2. \tag{4.1.11}$$

$y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$. Алуымыз бойынша, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 = 0$. (4.1.11)-ден $\left\{\sqrt{r}y_n'\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз. Дифференциалдау операциясы тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sqrt{r}y_n' - \sqrt{r}y'\right\|_2 = 0,$$

онда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sqrt{r}y_n'\right\|_2 = \left\|\sqrt{r}y'\right\|_2.$$

(4.1.8) қатысын ескеріп, (4.1.9) мен (4.1.10) теңсіздіктерінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз, сәйкесінше

$$\|y\|_2 \le C_1\|ly\|_2 \tag{4.1.12}$$

және

$$\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2 \le \sqrt{C_1}\|ly\|_2. \tag{4.1.13}$$

(4.1.12) мен (4.1.13) теңсіздіктерін мүшелей қосып, (4.1.3) - ті аламыз. Лемма дәлелденді.

Теорема 4.1.1. Егер r және ρ функциялары $0 < \delta_1 \le \rho(x) \le C(1 + |x|^N)(N > 0)$, $\frac{r}{\rho^2} \ge 1$ және $\gamma_{1,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырса, онда (4.1.14) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Дәлелдеу. (4.1.14) теңдеуінің шешімінің жалғыздығы Лемма 4.1.1 - ден шығады. Әрбір $F \in L_2(\mathbb{R})$ оң жағы үшін (4.1.14) теңдеуінің шешімі табылатынын көрсету үшін бізге $R(l) = L_2(\mathbb{R})$ теңдігі орындалатынын көрсету жеткілікті. Айталық соңғы теңдік орындалмасын. l – тұйық оператор болғандықтан, (4.1.12) теңсіздігі бойынша, $R(l) = \overline{R(l)}$. Онда белгілі

$$L_2(\mathbb{R}) = R(l) \oplus Ker\ \ l^*,$$

жіктелуі бойынша, $u \in L_2(\mathbb{R})\backslash R(l)$ нөлдік емес элементі табылып, ол $l^*u = 0$ теңдігін қанағаттандырады. Мұндағы l^* - l-ге түйіндес оператор. l^*u элементін анықтайық. $(l_0 y, u)$ $(y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}),\ u \in D(\ l^*)$ скаляр көбейтіндісін түрлендіреміз

$$(ly,u)=\int_{-\infty}^{\infty}(\rho(x)(\rho(x)y')'')'u\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}(r(x)y')'u\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}(\rho(x)y')''\rho(x)u'\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}r(x)y'u'\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)y'(\rho(x)u')''\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}y(r(x)u')'\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y[(\rho(x)(\rho(x)u')'')'-(r(x)u')']\,dx=(y,l^*u).$$

Соңғы теңдіктен, $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ жиыны $L_2(\mathbb{R})$ -де тығыз болғандықтан,

$$l^*u=(\rho(x)(\rho(x)u')'')'-(r(x)u')'$$

екені шығады. Онда

$$(\rho(x)(\rho(x)u')'')'-(r(x)u')'=0.$$

Егер

$$\rho u'=z \tag{4.1.15}$$

белгілеуін жасасақ, онда соңғы теңдеу былайша жазылады:

$$\left(\rho z''-\frac{r}{\rho}z\right)'=0.$$

Осыдан

$$-z''+\frac{r}{\rho^2}z=\frac{C_2}{\rho}. \tag{4.1.16}$$

$\frac{r}{\rho^2}\geq 1$ болғандықтан ([64] – ті қара),

$$-z''+\frac{r}{\rho^2}z=0$$

теңдеуінің келесі

$$z_1(x)\to+\infty\ (x\to+\infty),\qquad z_1(x)\to 0\quad(x\to-\infty),$$

$$z_2(x) \to 0(x \to +\infty),\ z_2(x) \to +\infty \quad (x \to -\infty),$$

қатыстарын қанағаттандыратын екі өзара сызықты тәуелсіз $z_1(x)$ және $z_2(x)$ шешімдері бар және мұндағы ұмтылу экспоненциалды. Келесі

$$G(x,t) = \begin{cases} z_1(t)z_2(x), & -\infty < t < x, \\ z_1(x)z_2(t), & x < t < +\infty \end{cases}$$

Грин функциясы үшін $0 < G(x,t) \le C_0 e^{-\delta_0|x-t|}$ теңсіздіктері орынды. Және (4.1.16) теңдеуінің жалпы шешімі былайша жазылады

$$z(x) = C_3 z_1(x) + C_4 z_2(x) + C_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x,t)}{\rho(t)} dt. \tag{4.1.17}$$

(4.1.15) және (4.1.17)-ден

$$u(x) = C_6 + C_3 \int_0^x \frac{z_1(t)}{\rho(t)} dt + C_4 \int_0^x \frac{z_2(t)}{\rho(t)} dt +$$

$$+C_5 \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\, dt. \tag{4.1.18}$$

$0 < \delta_1 \le \rho(x)$ шартынан (4.1.18) - дегі екінші қосылғыш $x \to +\infty$ жағдайында басқалардан тез өседі, онда, $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ болғандықтан, $C_3 = 0$. Ал (4.1.18) - дегі үшінші қосылғыш $x \to -\infty$ жағдайында тез өседі, демек $C_4 = 0$. Сонымен

$$u(x) = C_6 + C_5 \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\, dt.$$

Жалпылықты шектемей,

$$u(x) = 1 + C_7 \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\, dt \tag{4.1.19}$$

деп есептеуге болады. Осыдан, егер $C_7 \ge 0$ болса, онда $u(x) \ge 1$ $(x > 0)$. Ал егер $C_7 < 0$ болса, онда $u(x) \ge 1$ $(x < 0)$. Демек $u(x) \notin L_2(\mathbb{R})$. Алынған қарама-қайшылық $R(l) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

4.2 Коэффициенттері шенелмеген төртінші ретті екі мүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары

$$\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' = F(x), \qquad (4.2.1)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x \in \mathbb{R}$, $r(x) > 0$ үзіліссіз дифференциалданатын, $\rho(x) > 0$ үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, $s(x) > 0$ – үзіліссіз функциялар, ал $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ жиынында анықталған

$$l_0 y = \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'$$

операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. (4.2.1) теңдеуінің шешімі деп $ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін айтамыз.

Лемма 4.2.1. Айталық $s(x), r(x)$ функциялары $s(x) \geq \delta > 0, r(x) \geq \delta > 0$ және $\gamma_{1+s,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in D(l)$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|l_0 y\|_2. \qquad (4.2.2)$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. $(l_0 y, y)$ скаляр көбейтіндісін түрлендірейік.

$$(l_0 y, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' y\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' y\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'' \rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)' dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[\left(\frac{y}{s}\right)'\right]^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\right]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[\left(\frac{y}{s}\right)'\right]^2 dx =$$

$$= \left\|\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2.$$

Осыдан

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2 \le (l_0y, y). \qquad (4.2.3)$$

Екінші жағынан

$$(l_0y, y) \le \|l_0y\|_2 \, \|y\|_2. \qquad (4.2.4)$$

$\frac{y}{s} = v$ белгілеуін жасасақ, $\gamma_{s,\sqrt{r},1} < \infty$ шарты бойынша [63]

$$\|sv\|_2 \le 2\gamma_{s,\sqrt{r},1}\left\|\sqrt{r}v'\right\|_2$$

немесе

$$\|y\|_2 \le 2\gamma_{s,\sqrt{r},1}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2.$$

Онда (4.2.3), (4.2.4) теңсіздіктері мен $\gamma_{s,\sqrt{r},1} < \infty$ шарты бойынша,

$$\|y\|_2^2 \le C_1\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2 \le C_1\|l_0y\|_2 \, \|y\|_2.$$

Осыдан

$$\|y\|_2 \le C_1\|l_0y\|_2. \qquad (4.2.5)$$

(4.2.4) бойынша,

$$\|l_0y\|_2 \ge \frac{\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2}{\|y\|_2}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{C_1}}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2$$

немесе

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 \le \sqrt{C_1}\|l_0y\|_2. \qquad (4.2.6)$$

(4.2.5), (4.2.6) бағалары $D(l)-$ ге тиісті әрбір элемент үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. l операторы l_0 -дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0, \;\; \|l_0y_n - ly\|_2 \to 0 \; (n \to \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \qquad \|l_0 y_n\|_2 \to \|ly\|_2 (n \to \infty). \tag{4.2.7}$$

(4.2.5)және (4.2.6) бойынша, сәйкес

$$\|y_n\|_2 \le C_1 \|l_0 y_n\|_2 \tag{4.2.8}$$

және

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s}\right)' \right\|_2 \le \sqrt{C_1} \|l_0 y_n\|_2. \tag{4.2.9}$$

Екіншіден (4.2.8), (4.2.9) теңсіздіктерінен және (4.2.7) қатыстарынан әрбір $y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ $(n, m -$ натурал сандар$)$ үшін

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s}\right)' - \sqrt{r} \left(\frac{y_m}{s}\right)' \right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \le C_2 \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 \tag{4.2.10}$$

бағасы шығады. Алуымыз бойынша, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 = 0$. Сондықтан (4.2.10)-нан $\left\{ \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s}\right)' \right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз. Жалпыланған дифференциалдау және функцияға көбейту операциялары тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s}\right)' - \sqrt{r} \left(\frac{y}{s}\right)' \right\|_2 = 0.$$

Онда норманың қасиеті бойынша,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s}\right)' \right\|_2 = \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s}\right)' \right\|_2.$$

(4.2.7) қатысын ескеріп, (4.2.8) мен (4.2.9) теңсіздіктерінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз, сәйкесінше

$$\|y\|_2 \le C_1 \|ly\|_2 \tag{4.2.11}$$

және

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s}\right)' \right\|_2 \le \sqrt{C_1} \|ly\|_2. \tag{4.2.12}$$

(4.2.11) мен (4.2.12) теңсіздіктерін мүшелей қосып, (4.2.2) бағасына келеміз. Лемма дәлелденді.

Теорема 4.2.1. Егер $r(x), s(x)$ функциялары Лемма 4.2.1 шарттарын және $0 < \delta_1 \le \rho(x) \le C(1+|x|^N)$ $(N > 0)$, $\frac{r}{\rho^2} \ge C_1 > 0$ қатыстарын қанағаттандырса, онда (4.2.1) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Дәлелдеу. (4.2.1) теңдеуінің шешімінің жалғыздығы Лемма 4.2.1 - ден шығады. l – тұйық оператор болғандықтан, (4.2.11) теңсіздігі бойынша, $R(l) = \overline{R(l)}$. $R(l) \ne L_2(\mathbb{R})$ деп қарсы жориық. Онда нөлдік емес $v \in L_2(\mathbb{R})\backslash R(l)$ элементі табылады. Жалпылықты шектемей, v элементі $R(l)$ – ге ортогональ деп аламыз. Демек әрбір $y \in D(l)$ үшін,

$$(ly, v) = 0.$$

Айталық, l^* берілген l операторына формальды түйіндес оператор болсын, онда $y \in D(l)$, $v \in D(l^*)$ үшін $(ly, v) = (y, l^*v)$. Келесі $(l_0 y, v)$ $(y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}),\ v \in D(l^*))$ скаляр көбейтіндісін түрлендірейік.

$$(l_0 y, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' v\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' v\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'' \rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)' dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\left(\frac{v}{s}\right)' dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)'' dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\left[\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)'\right] dx = (y, l^*v).$$

Демек, $v \in L_2(\mathbb{R})$ элементі келесі біртекті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады

$$l^*v = \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' = 0.$$

Егер

$$\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)' = z \tag{4.2.13}$$

деп белгілесек, онда $s(x) > 0$ болғандықтан,

$$\left(\rho z'' - \frac{r}{\rho} z\right)' = 0.$$

Осыдан

$$-z'' + \frac{r}{\rho^2} z = \frac{C_2}{\rho}. \tag{4.2.14}$$

Мұндағы C_2 - кез-келген тұрақты. $r \geq C_1\rho^2$ болғандықтан [64], біртекті

$$-z'' + \frac{r}{\rho^2} z = 0$$

теңдеуінің келесі

$$z_1(x) \to +\infty \ (x \to +\infty), z_1(x) \to 0 \ (x \to -\infty),$$

$$z_2(x) \to 0 \ (x \to +\infty), \ z_2(x) \to +\infty \ (x \to -\infty)$$

қатыстарын қанағаттандыратын екі өзара сызықты тәуелсіз $z_1(x)$ және $z_2(x)$ шешімдері бар және мұндағы ұмтылу экспоненциалды.

$$G(x,t) = \begin{cases} z_1(t)z_2(x), & -\infty < t < x, \\ z_1(x)z_2(t), & x < t < +\infty \end{cases}$$

Грин функциясы үшін $0 < G(x,t) \leq C_0 e^{-\delta_0|x-t|}$ теңсіздіктері орынды. Ал (4.2.14) теңдеуінің жалпы шешімі былайша жазылады

$$z(x) = C_3 z_1(x) + C_4 z_2(x) + C_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x,t)}{\rho(t)} dt. \tag{4.2.15}$$

(4.2.13) және (4.2.15) қатыстарынан

$$v(x) = C_6 s(x) + C_3 s(x) \int_0^x \frac{z_1(t)}{\rho(t)} dt + C_4 s(x) \int_0^x \frac{z_2(t)}{\rho(t)} dt +$$

$$+ C_5 s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau. \tag{4.2.16}$$

Шарт бойынша, $v(x) \neq 0$ екенін ескеріп, $C_6 \neq 0$ деп аламыз. $0 < \delta_1 \leq \rho(x)$ болғандықтан, (4.2.16) - дағы екінші қосылғыш $x \to +\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі. Онда, $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ қатысынан, $C_3 = 0$ екені шығады. Ал (4.2.16) - дағы үшінші қосылғыш $x \to -\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі, демек $C_4 = 0$. Сонымен

$$v(x) = C_6 s(x) + C_5\, s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\, dt.$$

Жалпылықты шектемей,

$$v(x) = s(x) + C_7 s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\, dt$$

деп есептеуге болады. Осыдан, егер $C_7 > 0$ болса, онда әрбір $x > 0$ үшін $v(x) \geq \delta_1 > 0$. Ал егер $C_7 < 0$ болса, онда $x < 0$ болғанда $v(x) \geq \delta_1 > 0$. Демек, екі жағдайда да $v(x) \notin L_2(\mathbb{R})$. Алынған қарама-қайшылық $R(l) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

(4.2.11) және (4.2.12) бағаларын пайдаланып, келесі тұжырымға келеміз.

Теорема 4.2.2. Егер r, ρ және s функциялары 4.2.1 теоремасының шарттарын қанағаттандырып,

$$\lim_{x\to\infty} \alpha_{s,\sqrt{r},1}(x) = 0, \lim_{t\to-\infty} \beta_{s,\sqrt{r},1}(t) = 0$$

теңдіктері орындалса, онда (4.2.1) теңдеуін құрайтын

$$ly = \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'$$

минималды тұйық дифференциалдық операторына кері l^{-1} операторы $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігінде компактылы болады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста барлық сан осінде берілген коэффициенттері шенелмеген екімүшелі нұқсанды төртінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулердің шешілуі мен шешімдерінің тегістігі мәселелері қаралды. Бұл теңдеулердің басты өзгешелігі - аралық коэффициенттері шектеусіз өсе алады, ал потенциал (төменгі коэффициент)нөлге тең. Төменде біз теңдеудің аралық мүшелерінің реті деп оған енетін ізделінді функцияның туындысының ретін айтатын боламыз.

Жұмыстың басты ғылыми нәтижелері мынадай. Аралық коэффициенті шектеусіз өсе алатын екімүшелі төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеулердің шешілуі мен регулярлығы есебін осыған дейін кеңірек зерттелген нұқсанды емес және потенциалы таңбасын сақтайтын екімүшелі дифференциалдық теңдеудің шешілуі мәселесіне келтіру мүмкіндігі дәлелденді. Екімүшелі төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеудің тұрақты коэффициентті жоғарғы мүшесі және сәйкес бірінші, екінші және үшінші ретті аралық мүшесі бар әртүрлі үш жағдайы қарастырылып, шешімнің табылуы мен жалғыз болуы үшін аралық коэффициентке қойылатын жеткілікті шарттар алынды. Аралық коэффициенттердің тербелісіне қосымша шарт қойылған кезде, аталған үш теңдеудің де шешімі максималды регулярлы болатыны дәлелденді және тиісті коэрцитивті баға көрсетілді. Шектеусіз өсе алатын жоғарғы және аралық коэффициенттері бар төртінші ретті кейбір дивергентті дифференциалдық теңдеулердің корректілік шарттары алынды. Дәлелденген максималды регулярлық және априорлық бағалар негізінде теңдеулерді құрайтын операторлардың резольвенталарының компактылық шарттары көрсетілді. Теңдеудің айнымалы коэффициенттері тегіс функциялар деп ұйғарылғанымен, алынған жеткілікті шарттар олардың өздеріне ғана тәуелді, ал коэффициенттердің туындыларына шектеулер қойылмайды. Бұл шектеулерді функциялардың кең кластары қанағаттандырады.

Жұмыста локальды және априорлық бағалаулар әдістері, тұйық операторлар теориясының кейбір фактілері, Харди типті теңсіздіктерді қолдану, түйіндес операторларды идентификациялау және спектрлік теория әдістері пайдаланылды.

Жұмыстың 1-3 бөлімдерінің негізгі теоремалары [3, 28, 34, 38] жұмыстарының нәтижелерін төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерге таратады. Ал 4-бөлімде алынған нәтижелер [46, 47] жұмыстарын жалпылайды.

Алынған нәтижелер - теориялық сипатта. Дәлелденген максималды регулярлық теңсіздіктері төртінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық операторлардың тұтас класын толық сипаттауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, сызықты емес сингулярлы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу үшін, атап айтқанда, олардың шешілу шарттарын алу, шешімдерінің максималды регулярлық қасиеттерін көрсету және оларды жуықтау әдістерінің сапасын бағалау үшін көмекші материал бола алады.

Демек, жұмыс нәтижелері біріге отырып сингулярлы төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің теориясын айтарлықтай кеңейтеді.

Алынған нәтижелер, сонымен бірге, шектеусіз коэффициенттері бар төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін практикалық есептерді шешуге қолданылуы мүмкін. Атап айтқанда, олар математикалық физика, басқару теориясы, қаржылық математика және басқа салалар үшін үлкен маңызы бар эволюциялық және эллиптикалық теңдеулердің жаңа түрлерін талдауға қолданылуы мүмкін. Жұмыс барысында әзірленген әдістер нақты физикалық және инженерлік есептерді, соның ішінде, турбуленттілік, континуум механикасы және электродинамика үрдістерін модельдеуде пайдаланылуы мүмкін.

Жалпы, жұмыс нәтижелері шенелмеген коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулердің теориясын байытып, оларды ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында практикада қолдану үшін негіз жасайды.

Негізгі нәтижелер 13 ғылыми мақала мен конференциялар материалдарында, оның ішінде, 4 мақала Scopus базасына енетін басылымдарда жарияланған.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Физматлит, 2002. - 208 с.

2 Островский Л.А., Потапов И.А. Введение в теорию модулированных волн. - М.: Физматлит, 2003. - 400 с.

3 Tunc C. Stability and boundedness results for certain nonlinear vector differential equations of the fourth order //Nonl. Oscillations.–2006.–Vol. 9, №4.–P. 536-551.

4 Рудаков И.А. Периодические колебания двутавровой балки // Вестник Брянского гос. техн. университета. –2017, №4 (57).

5 Yadeta D.M., Gizaw A.K., Mussa Y.O. Approximate Analytical Solution of One-Dimensional Beam Equations by Using Time-Fractional Reduced Differential Transform Method // J. Appl. Math. –2020. –Vol. 2020, Article ID 7627385. –P.1-13.

6 Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. Fokker-Planck-Kolmogorov Equations // Mathematical Surveys and Monographs. – 2015. – P. 482.

7 Умаров Х.Г. Задача Коши дляуравнения изгибных колебаний нелинейно – упругого стержня бесконечной длины // Владикавказ. мат. журнал. –2017. – Т.19, №3. –С. 59-69.

8 Ornstein G.E., Uhlenbeck L.S. On the theory of Brownian motion// Phys. Rev. –1930. –Vol.36, –P. 823-841.

9 Gozzi F., Monte R. And Vespri V. Generation of analytic semigroups and domain characterization for degenerate elliptic operators with unbounded coefficients arising in financial mathematics. Part I // Dif. Int. Equ. –2002. –Vol. 15, –P. 1085–1128.

10 Jhwueng D.-C. And Maroulas V. Phylogenetic Ornstein-Uhlenbeck regression curves// Statistics & Probability Letters. –2014. –Vol. 89, –P. 110-117.

11 Frank T.D. Nonlinear Fokker–Planck equations. Fundamentals and applications. –Berlin.: Springer - Verlag, 2005.

12 Feller W. Diffusion processes in one dimension// Trans. Amer. Math. Soc. –1954. –Vol. 77, –P. 1–31.

13 Veyl' G., Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte// Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. –1911. –Vol. 1911, –P.110–117.

14 Cianchi A., Musil V., Pick L. Optimal Sobolev embeddings for the Ornstein-Uhlenbeck operator// Journal of Differential Equations. –2023. –Vol. 359. – P. 414-475.

15 Kolmogoroff A.N. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlich keitsrechnung// Math. Ann. –1931. –Vol. 104. –P. 415–458.

16 Lorenzi L. Analytical Methods for Kolmogorov Equations. –NY.:CRC Press, 2017.

17 Metafune G., Negro L., Spina C. Maximal regularity for elliptic operators with second-order discontinuous coefficients// J. Evol. Equ. –2021. –Vol. 21, – P. 3613-3637.

18 Oinarov R. Separability of the Schrödinger operator in the space of summable functions// Dokl. Akad. Nauk SSSR. –1985. –Vol. 285,№5. – P. 1062–1064.

19 Park D. Weighted maximalL_q (L_p) -regularity theory for time-fractional diffusion-wav eequations with variable coefficients// J. Evol. Equ. –2023. –Vol. 23, №1 (12).

20 Da Prato G., Debussche A. An integral inequality for the invariant measure of a stochastic reaction–diffusion equation// J. Evol. Equ. –2017. –Vol. 17, №1.– P. 197-214.

21 Ospanov K.N. Maximal L_p - regularity for a second-order differential equation with unbounded intermediate coefficient// Electron. J. Qual. TheoryDiffer. Equ. –2019.– Vol. 65. –P. 1-13.

22 Lizarraga I., Marangell R. Nonlinear stability of shock-fronted travelling wave sin reaction-nonlinear diffusion equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. –2024. –Vol. 460, 134069.

23 Исмагилов Р. С. Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка // Докл. АН СССР. –1962. – Т. 142, №6. –С. 1239–1242.

24 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // ДАН СССР. – 1977. – Т. 234, №3. – С. 540-543.

25 Boimatov K.Kh. Separability theorems, weighted spaces and their applications// Trudy Mat. Inst. Steklov.–1984.– Vol. 170. –P. 37–76.

26 Eweritt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators// Proc. Lond. Math. Soc.–1971. – Vol. 3. –P. 301–324.

27 Kunstmann P., Weis L. Maximal L_p -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H1 functional calculus // Lecture Notes in Mathematics. – 2004. –Vol. 1855. – P. 65-311.

28 Ospanov K. Maximal regularity result for a singular differential equation in the space of summable functions// Chaos, Solitons & Fractals. –2021.– Vol. 144, 110691.

29 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

30 Hieber M., Lorenzi L., Prüss J., Rhandi A., Schnaubelt R. Global properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck operators onL_p (R^n, R^n)with more than linearly growing coefficients// Journal of Mathematical Analysis and Applications.– 2009. – Vol. 350, №1. – P. 100–121.

31 Chicco M., Venturino M. Dirichlet problem for a divergence form elliptic equation with unbounded coefficients in an unbounded domain// Ann. Mat. Pura Appl. –2000. –Vol.178.– P. 325–338.

32 Cupini G., Fornaro S. Maximal regularity in L_p (R^N) for a class of elliptic operators with unbounded coefficients// Dif. Int. Equ. –2004.–Vol. 17.–P.259 – 296.

33 Da Prato G., Goldys B. Elliptic operators on R^d with unbounded coefficients// J. Differential Equations. –2001. –Vol. 172.–P. 333-358.

34 Ospanov K.N., Yeskabylova Zh.B., Bekjan T.N. Th solvability results for the third-order singular non-linear differential equation // Eurasian Math. J. – 2019. – Vol. 10, №4. –P. 84-90.

35 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. Coercive Solvability of Odd-Order Differential Equations and ItsApplications// Doklady Mathematics. – 2010. –Vol. 82, №3. –P. 909–911.

36 Muratbekov M.B., Bayandiyev Ye.N. Existence and smoothness of solutions of a singular differential equation of hyperbolic type // Bulletin of the Karaganda University. –2022. –Vol. 107, №3.

37 Yesbayev A. N., Ospanov M. N. The solvability conditions for the second order nonlinear differential equation with unbounded coefficients in $L_2(R)$// Bulletin of the Karaganda university, Mathematics series. –2021. –№ 1(101). – P. 104–110.

38 Akhmetkaliyeva R.D., Mukasheva T.D., Ospanov K.N. Correct and coercive solvability conditions for a degenerate high order differential equation // Eurasian Math. J. –2023. –Vol. 14, №4. –P. 9–14.

39 Ospanov K.N.,Yesbayev A.N. Solvability and maximal regularity results for a differential equation with diffusion coefficient// Turk. J. Math. –2020. –Vol. 44, No.4. –P. 1304–1316.

40 Yesbayev A.N., Ospanov K.N. Maximal regularity estimate for a differential equation with oscillating coefficients// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. –Vol. 109, № 1. –P. 25-34.

41 Cheng Z., Ren J. Multiplicity results of positive solutions for fourth-order nonlinear differentia lequation with singularity// Math. Met. Appl. Sci. –2015. https://doi.org/10.1002/mma.3481

42 Eastham M.S.P. The limit-2 case of fourth-order differential equations // Quarterly Journal of Mathematics. –1971. –Vol. 22, No.1. –P. 131-134.

43 Ospanov K.N., Yesbayev A.N. The two-sided estimates of the Fredholm radius and compactness conditions for the operator associated with a second order differential equation// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. –2021. –Vol. 110, No.2. –P. 19-26.

44 Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. Conditions for maximal regularity of solutions to fourth-order differential equations// Bulletin of the Karaganda university, Mathematics series. –2024. –No.4(116). – P. 149–158. https://doi.org/10.31489/2024m4/149-158

45 Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. On the correctness of one class of fourth-order singular differential equations// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. –2024. –Vol. 123, No.3. –P. 21-32. https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v123-i3-3

46 Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. Conditions for solvability and coerciveness of a fourth-order differential equation with an intermediate coefficient// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. –2025. –Vol. 125, № 1. –P. 56-65. https://doi.org/10.26577/JMMCS2025125105

47 Ospanov K., Moldagali Ye. Maximal regularity conditions for fourth order differential equations with intermediate terms// Journal of Mathematical Sciences. – 2025. -Vol. 291, No. 1. – P. 75 – 82. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07779-0

48 Оспанов К.Н., Молдағали Е.Ө. Төртінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары // Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical sciences. – 2025. -Vol. 90, No. 2. – P. 116 – 123.
DOI: *10.51889/2959-5894.2025.90.2.010*

49 Ospanov K.N., Moldagali Ye.O. On one elliptic equation with unbounded coefficients // MPMMA Conference Proceedings. – Baku, 2024. – P. 76-77. http://doi.org/10.58225/mpmma.2024.76-77

50 Молдағали Е.Ө., Оспанов Қ.Н. Төртінші ретті бір дифференциалдық теңдеудің коэрцитивті шешілу шарттары // ҚР ғылыми қызметкерлері күніне арналаған дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция материалдарының жинағы. – Алматы, 2024.– Б. 83-84.

51 Оспанов К.Н., Молдагали Е.О., Есбаев А.Н. Коэрцитивные оценки решения сингулярного дифференциального уравнения третьего порядка // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения – 2023: тез.докл. межд. науч. конф.– Ташкент, 2023. –С. 247.

52 Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. On the correctness of one fourth-order differential equation // EMJ Conference Proceedings. – Astana, 2025. –P. 115.

53 Оспанов К.Н., Молдагали Е.О., Ахметкалиева Р.Д. Нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка // Неклассические уравнения математической физики и их приложения – 2024: тез.докл. междунар. науч. конф.– Ташкент, 2024. –С. 208.

54 Молдағали Е.Ө., Алдомжарова Т.А. Төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің корректілігі туралы // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки Республики Казахстан– 2025: тез.докл.междунар. науч. конф.–Алматы, 2025. –С. 87-88.

55 Молдагали Е.О. О корректности дифференциального уравнения четвертого порядка //XX Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ – 2025». – 2025: тез. докл. междунар. науч. конф. – Астана, 2025. –С. 65.

56 Ospanov K.N., Moldagali Ye.O., Uspanova Zh. Conditions for the regularity of a solution of one fourth-order differential equation with unbounded coefficients // XIV Int. conf. Of the Georgian Mathematical Union. – Batumi, 2024. – P. 159.

57 Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasi-Linear Elliptic Equations. –NY.: Acaddemic Press,1968.

58 Аникеева Л. И. Об индексе дефекта одного дифференциального оператора высшег опорядка // УМН. –1977. –Т. 32, №1(193). –С. 179–180.

59 Касымов Е.К., Отелбаев М. О существенной самосопряженности одного дифференциального оператора // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.–1979. №1. –С.20-23.

60 Касымов Е.К. Достаточное условие самосопряженности дифференциального оператора // Известия АН КазССР. Серия физ.-матем. – 1980, №3. –С.40-44.

61 Апышев О.Д., Отелбаев М. О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Известия АН СССР. –1979.–Т. 43, №4. – С. 739-764.

62 Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights// Stud. Math. – 1972. – Vol. 44, No. 1. –P. 31-38.

63 Ospanov K., Akhmetkaliyeva R. Separation and the existence for second order nonlinear differential equation // Elect. J. Qual. Th. Dif. Eq. –2012.– No. 66.– P. 1-12.

64 Гриншпун Э.З., Отелбаев М. О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty,\ \infty)$ // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984, №5. – С. 26-29.